

Abstract

Blods viskositet afhænger af shearraten og blod er derfor en ikke-newtonsk væske. I dette projekt anvendes en xanthangummi/ glycerin-opløsning som modelvæske for blod. Væsken undersøges via flowet om den kan betragtes som værende generaliseret newtonsk.

Der er foretaget eksperimenter hvor inputtet er en sinusoidal trykgradient og output er det kumulerede flow gennem et stift lige rør. Der foretages også målinger på en newtonsk glycerinopløsning til vurdering af opstillingens anvendelighed.

Rørstrømmene er blevet modelleret matematisk ved udfra de relevante konstitutive ligninger at løse Navier-Stokes ligninger. Dette er sket numerisk med Matlab-funktionen for paraboliske partielle differentiaalligninger. Ved sammenligning mellem empiri og teori ses store forskelle, både hvad angår flowets amplitude og fase. Det har ikke været muligt at opnå en tilfredsstillende forklaring på disse uoverensstemmelser. På den baggrund kan der ikke konkluderes om hvorvidt væsken opfører sig som en generaliseret newtonsk væske.

English abstract

The viscosity of blood depend on the shear rate which consequently makes it a non-newtonian fluid. In this master thesis a xanthan gum/ glycerin solution is used as blood analog fluid, and the flow of the fluid is studied to determine whether it can be considered as a generalized newtonian fluid.

To observe this flow, experiments are conducted with a sinusoidal oscillating pressure gradient as input and accumulated flow through a rigid straight pipeline as the output. To study the precision of the apparature, a newtonian glycerin solution is used as well.

The flow is described by building a mathematical model, based on Navier-Stokes' and the constitutive equations. This parabolic partial differentialequation is solved numerically in Matlab.

Comparison between experimental and theoretical data shows substantial differences on both the amplitude and the phase of the flow.

A fully satisfactory and exhaustive explanation for these discrepancies have not been arrived at, unabling us to conclude whether blood can be characterized as a generalized newtonian fluid.

By comparing the experimental data with the theory there at hughe differences observed both for the amplitude og the flow and the phase. There has not been acheved at satisfied explanation for the differences. And therefore it is not been concluden whether the behaviour of the fluid can be described as a generalized newtonian fluid

Forord

Denne rapport er en specialeafhandling udarbejdet som afslutning på vores overbygningsuddannelse i matematik og fysik ved IMFUFA¹, RUC². Arbejdet bag er et kombineret matematik- og fysikprojekt. På matematiksidens er der tale om et professionsprojekt af modelbyggervarianten og på fysiksidens er det et frit projekt indeholdende egne eksperimenter.

Inden projektets start havde vi begge en meget begrænset viden inden for dette område. Vi har ikke tidligere beskæftiget os med hverken rheologi, kontinuumsmekanik eller numerisk analyse, så de indledende teoretiske studier har været omfattende.

Vi vil gerne takke vores vejledere, lektor i eksperimentalfysik Niels Boye Olsen (IMFUFA, RUC) og ekstern lektor i matematik Jesper Larsen (IMFUFA, RUC), for engagement i såvel den generelle som den konkrete vejledning i problemet. Værkstedet på IMFUFA har været behjælpelig med fremstilling af de enkelte dele til vores forsøgsapparat.

Desuden vil vi takke lektor i kemi Søren Hvidt (Institut for Biologi og Kemi, RUC), for lån af laboratorie og -udstyr, samt for mange samtaler både mht. vores problem, den konkrete anvendelse af laboratorieudstyr samt fortolkningen af data. Vi takker også professor Ole Hassager (Polymercenteret DTU), for i begyndelsen at yde en stor hjælp til mulige angrebsvinkler på problemet. Endelig tak til Tage Christensen (IMFUFA, RUC) for konstruktiv hjælp via samtaler og litteratur.

Roskilde fredag d. 13. februar

Stine Marott Normann

Jogvan Martin Poulsen

¹ Institut for studiet af Matematik og Fysik samt deres funktioner i Undervisning, Forskning og Anvendelser.

² Roskilde Universitetscenter.

Indhold

1	Indledning	1
1.1	Problemformulering	2
1.2	Metode	2
1.3	Læsevejledning	3
2	Historisk resumé	5
2.1	Historisk tilbageblik	5
2.2	Nutidig forskning	6
3	Viskoelasticitet	9
3.1	Stress	9
3.2	Strain	10
3.3	Elasticitet	10
3.4	Viskositet	11
3.5	Viskoelasticitet	12
3.6	En antagelse om elasticiteten i vores forsøg	14
3.7	Maxwellmodellen	16
3.7.1	Maxwell-bidraget til imaginærdelen af visko- siteten	18
3.8	Generaliserede newtonske væsker	20
3.9	Stress- og straintensoren	21
4	Navier-Stokes ligninger i rør	25

4.1	Turbulent strømning	25
4.2	Newtonsk væskestrømning	27
4.2.1	Newtonsk væskestrømning i rør	30
4.3	Ikke-newtonsk væskestrømning	31
4.3.1	Ikke-newtonsk væskestrømning i rør	32
5	Modellering af rørstrømmene	35
5.1	Generelle forhold	35
5.2	Stationær strømning af en newtonsk væske	37
5.3	Oscillerende strømning af en newtonsk væske	39
5.3.1	Womersley-tallet	44
5.3.2	En sinusoidal trykgradient	44
5.4	Stationær strømning af en generaliseret newtonsk væske	51
5.5	Oscillerende strømning af en generaliseret newtonsk væske	52
6	Blod og modelvæske	57
6.1	Blodvæsken	57
6.1.1	Arteriegeometri og vores forsimpning	58
6.2	Valg af modelvæske	59
6.3	Måling med rheometer	60
6.4	Data for blod	61
6.5	Data for modelvæsken	62
7	Eksperiment	65
7.1	Måleapparat	65
7.1.1	Apparatets funktion	66
7.2	Dimensionering	67
7.3	Dataopsamling	69

7.4	Tryksensorens nulpunkt	70
8	Måledata	73
8.1	Rådata	73
8.2	Teoretiske data	75
9	Analyse	79
9.1	Glycerin-målinger	79
9.2	Xanthangummi-målinger	81
9.3	Reproducerbarhed	82
9.4	Det matematiske værktøj	83
10	Fejlkilder	85
10.1	Tryksensorens placering på rørstudsene	85
10.2	Siliconeslangen	87
10.2.1	Slangerne til tryksensoren	89
10.3	Randeffekter	89
10.4	Turbulens	90
10.5	Væskestanden i vægtkarret	90
10.6	Væskeaccelerationsbidrag til vægten	94
10.7	Mulige forklaringer	95
11	Konklusion	97
A	M filer	99
A.1	Newtonsk væske	99
A.2	Generaliseret newtonsk væske	100
B	Rådata	103
	Litteratur	109

1 Indledning

I mange matematiske modeller af menneskets arteriekredsløb antages det at blod er en newtonsk væske. Dette er ikke tilfældet. Selvom der kan argumenteres rimeligt for antagelsen og selvom modellerne viser sig anvendelige, er der i tidens løb sat spørgsmålstejn ved den. F.eks. skriver Pedley (Pedley; 1980, s. 31):

'It is not clear how to assess the importance of temporarily non-Newtonian blood on unsteady arterial fluid dynamics; this is a problem that should be investigated, but that will here be ignored.'

Hvad betyder det, at en væske ikke er newtonsk? Der findes væsker der er letflydende som vand og tyktflydende som sirup. Men der findes også væsker som ikke er lige tyktflydende over det hele. De fleste har prøvet at ryste ketchup ud af en flaske. Man ryster flere gange uden at der kommer noget ud af flasken, og så lige pludselig kommer det væltende. Denne egenskab optræder fordi ketchuppen er tyktflydende, når den ikke er i bevægelse. Når den begynder at bevæge sig i flasken, bliver den del der ligger tæt ved flaskevæggen mere tyndtflydende, og resten af ketchuppen vil så at sige glide ned ad denne.

Mere formelt betyder det at viskositeten ikke er konstant, men afhænger af shearraten¹. Hvis en væske udover en shearrate afhængig viskositet ikke opfører sig elastisk, kaldes den for en generaliseret newtonsk væske. Om blod kan beskrives som en generaliseret newtonsk væske når det flyder i de store arterier er udgangspunktet for denne rapport. Af tidsmæssige og praktiske hensyn har visse antagelser og forsimplinger været nødvendige, som det også fremgår af følgende problemformulering:

1 Shearrate er væskens hastighedsgradient, jf. afsnit 3.4.

1.1 Problemformulering

Opfører nettoflowet af en xanthangummi/glycerin-opløsning sig som en generaliseret newtonsk væske, når det strømmer igennem stive lige rør påtrykt en sinusoidal trykgradient?

1.2 Metode

Som det ses af problemformuleringen, har vi valgt at betragte en modelvæske for blod, ligesom vi også har valgt at modellere de elastiske kurvede arterier med stive (altså uelastiske) lige rør. Vi havde fra starten et ønske om selv at designe et forsøgsapparat der ved en relativ simpel metode ville kunne hjælpe os i besvarelsen af problemformuleringen. Dette var også til dels en nødvendighed, da vores institut ikke råder over eget udstyr.

Vores eksperimenter vil kort fortalt gå ud på at sende væsken igennem et stift lige rør påtrykt en sinusoidal trykgradient, og så måle nettoflowet igennem røret. Med nettoflow menes det i tiden kumulerede flow. Vi vil dimensionere forsøgsapparatet således at strømmingen består af de størrelser af shearrater for hvilke viskositeten er mest ikke-newtonsk. Vi vil variere størrelsen og frekvensen af trykgradienten.

Herudover vil vi opstille teoretiske matematiske modeller af de eksperimentielle strømninger. Viskositeten vil vi modellere med den såkaldte Carreau-model. Vi finder hastighedsfelterne både for en newtonsk glycerinopløsning (modelvæsken uden xanthangummi) og den ikke-newtonske modelvæske. Udfra disse findes de tilhørende værdier af nettoflowet som sammenlignes med vores måledata. I det newtonske tilfælde er modellen af nettoflowet bestemt analytisk og viskositeten kendt og vi vil derfor kunne bruge måledata til at vurdere præcisionen af vores forsøgsapparat.

Opstillet på punktform vil besvarelsen af problemformuleringen indeholde følgende:

1. Verificering af at blod og modelvæskens viskositeter udviser samme kvalitative opførsel (kapitel 6).
2. Opstilling af Carreau-model for modelvæsken (kapitel 6).
3. Dimensionering og brug af måleapparatur (kapitel 7).

4. Målinger med den newtonske glycerinopløsning og den ikke-newtonske modelvæske (kapitel 8).
5. Matematisk modellering af hastighedsfelterne for newtonsk og generaliseret newtonsk væske (kapitel 4 og 5).
6. Beregning af nettoflowet for de matematiske modeller (kapitel 5).
7. Sammenligning af teoretiske og eksperimentelle nettoflowdata (kapitel 9).

Foruden disse essentielle indholdspunkter vil rapporten indledningsvis også indeholde en præcisering og forklaring af de nødvendige begreber (kapitel 3) ligesom en historisk gennemgang af problemfeltets udvikling er ridset op (kapitel 2).

På dette tidlige stadie i rapporten vil vi gerne informere om, at vi ikke kommer til at kunne sige noget om modelvæsken ud fra vores eksperimenter. Dette skyldes at de newtonske glycerinmålinger ikke følger den velfunderede teori og forsøgsapparatet derfor ikke er pålideligt. Rapporten munder derfor ud i en redegørelse for mulige fejl ved vores forsøgsapparat.

1.3 Læsevejledning

På grund af vores egen sparsomme viden indenfor dette felt ved projektets start har vi valgt at lægge niveauet i rapporten, så den kan læses af studerende i samme situation.

I starten af hvert kapitel eller afsnit har vi angivet hvilke kilder der er blevet brugt til det pågældende stykke tekst. Kildehenvisningen, der består af forfatterens efternavn² og værkets udgivelsesår, refererer til kilderne i litteraturlisten. Der er ikke kilder på alt i rapporten, da f.eks fast definerede begreber er formuleret med vores egne ord. Ved direkte citater eller lignende er kilden angivet det pågældende sted i teksten.

Da 'xanthangummi/glycerin-opløsning' er et ord der optræder ofte og langt i denne rapport, vil vi istedet referere til den som modelvæske eller xanthangummiopløsning.

² Har en kilde flere forfattere vil kun det alfabetiske første optræde i kildehenvisningen.

2 Historisk resumé

I dette kapitel vil vi kort redegøre for den historiske udvikling, der har ført frem til at vi i dag betragter et blodflow som et fluid dynamisk problem, hvor blod som en viskøs væske flyder pulserende igennem elastiske beholdere (blodårerne). Vi vil også opsummere hvad den seneste forskning mener om hvorvidt blod kan betragtes som en newtonsk væske, når det strømmer i de store arterier.

2.1 Historisk tilbageblik

Tanner (1988) Pedley (1980)

Indtil begyndelsen af 1600-tallet var man af den overbevisning at blodet blev dannet kontinuerligt i leveren. Man forbandt ikke blodårenes udvidelse med hjertets slåen og vidste ikke at blodet cirkulerede. Men med William Harvey (1578-1657) fandt man ud af, at blodet cirkulerede rundt i kroppen som følge af hjertets pumpen. En af de ting der overbeviste ham var, da han estimerede hjertet til at pumpe ca. en liter blod rundt i minuttet (i dag ved man at der er tale om ca. 5 l/min). Denne mængde ville være umulig for leveren at producere og blodet måtte istedet cirkulere rundt i kroppen.

Isaac Newton (1642-1727) redegjorde for begrebet viskositet i et tillæg til sit værk 'Principia Mathematica'. Stephen Hales (1677-1761) var den første til at lave kvantitative målinger på blodkredsløbet. Han fandt blandt andet ud af, at blodflowet i venerne i modsætning til i arterierne er mere eller mindre stationært.

Matematikeren Leonhard Euler (1707-1783) udviklede bevægelsesligningerne for fluider og han var også den, der som den første, brugte dem på blod. Daniel Bernoulli (1700-1782) formulerede sine berømte ligninger og i 1827 opstillede Claude-Louis Navier (1785-1836) de generelle bevægelsesligninger, som fik deres endelige form som vi kender dem i dag af George Stokes (1819-1903) i 1845. De

er derfor kendt som Navier-Stokes ligninger.

Af andre interessante bidragydere i 1800-tallet kan fysikerne Jean-Louis Poiseuille (1797-1869) og Thomas Young (1773-1829) nævnes. Poiseuille fandt eksperimentelt sammenhængen mellem flow, trykgradient og diameteren på det rør, som væsken strømmer i. Denne sammenhæng er kendt som Poiseuilles ligning. Young forskede blandt andet i sammenhængen mellem arteriernes elasticitet og udbredelseshastigheden af pulsen, og har lagt navn til Youngs modul, et begreb indenfor elasticitetsteori.

2.2 Nutidig forskning

I meget af den forskning der bliver gjort i dag (Perktold & Hilbert (1986) Rindt & v Steenhoven (1996) Olufsen (1998) Shahcheraghi et al. (2002)) der vedrører blodflow i de store arterier, antages det at blod er en newtonsk væske. Antagelsen hviler på at shearraterne i de store arterier er så høje, at der kan ses bort fra den store variation i viskositet for de små shearrater. Af samme årsag benyttes den konstante viskositet η_∞ , som er grænseviskositeten for høje shearrater. Det antages dermed også at blod ikke er viskoelastisk.

I de to eksperimentielle studier Liepsch & Moravec (1984) og Ku & Liepsch (1986) vises, at det i strømninger i de store arterier er nødvendigt at tage hensyn til blods ikke-newtonske opførsel. Den samme konklusion kommer de til i F J H Gijsen & Janssen (1999b). Her studeres et statisk flow i en carotid¹ bifurcationsmodel² eksperimentielt. Der udføres eksperimenter med en modelvæske for blod (KSCN-X) og en newtonsk referencevæske (KSCN), og de to væskers hasighedsprofiler sammenlignes. Store forskelle findes, bl.a. er den ikke-newtonske hastighedsprofil fladere. Blodets ikke-newtonske viskositet modelleres med Carreau-Yasuda modellen, og der tages ikke højde for blods viskoelastiske egenskaber. Da der ses god overensstemmelse mellem data for blod-modelvæsken og de numeriske beregninger konkluderes der, at blods egenskab som blød væske er den dominerende ikke-newtonske faktor.

I F J H Gijsen & Janssen (1999a), som er en forlængelse af F J H Gijsen & Janssen (1999b), undersøges blods viskositets påvirkning af et ikke-statisk flow i en 90° bøjet rør. Selv i dette ikke-

¹ De to store carotide arterier forsyner hovedet med blod.

² I en bifurcationsmodel deler blodåren sig i to.

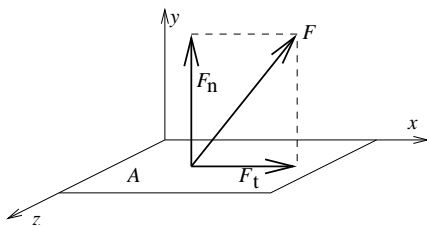
statiske flow konkluderes der i overensstemmelse med den første artikel. Desuden vises at det ikke-newtonske flow (KSCN-X) kan modelleres med en newtonsk model med en karakteristisk viskositet η_c som er ca. tre gange større end den typisk benyttede η_∞ .

3 Viskoelasticitet

Når et materiale påvirkes med en kraft vil det deformeres. Dette kan ske elastisk eller viskøst og i dette kapitel vil vi derfor lægge ud med at forklare begreberne elasticitet og viskositet. Herefter behandles viskoelasticitet som illustreres ved den mekaniske Maxwellmodel. Dernæst argumenterer vi for at blods elasticitet er negligerbar, hvilket bevirker at vi betragter blod som en generaliseret newtonsk væske. Afslutningsvis indfører vi generalitet i vores notation i form af stress- og straintensoren.

3.1 Stress

En kraft F der virker på en flade kan med fordel opdeles i to komponenter hhv. en normal og en tangential, se figur 3.1.



Figur 3.1 Den resulterende kraft kan opdeles i en tangentialkraft F_t og en normalkraft F_n .

Den der virker tangentialt på overfladen kaldes for shearkraften. Angives den pr. arealenhed kaldes den for **shearstresset** σ , som altså er defineret som

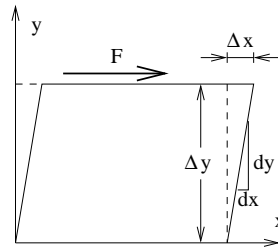
$$\sigma = \frac{F_t}{A} \quad (3.1)$$

hvor A er overfladearealet. Det er underforstået, at kraften virker jævnt på hele overfladen. Normalkraften kaldes pr. areal for

bulkstress σ_k . Stress måles i SI-enheden $[N/m^2]$ eller $[Pa]$.

3.2 Strain

Deformation, også kaldet strain, kan ske på to grundlæggende forskellige måder. Stoffet kan blive trykket sammen, dette kaldes **bulkstrain**, eller det kan vrides, hvilket kaldes **shearstrain**.



Figur 3.2 Shearstrain.

Shearstrain er illustreret på figur 3.2 hvor en klods med højden Δy bliver påvirket med en shearkraft på y -planen i x -retningen. Fladen forskyder sig Δx , og forskydningen eller shearstrain γ er defineret ved

$$\gamma = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy} \quad (3.2)$$

γ er en dimensionsløs størrelse.

Bulkstrain (og det tilhørende såkaldte bulkmodul K) der beskriver et stofs volumenændring har ikke relevans i denne rapport, da vi kun vil beskæftige os med inkompressible væsker. Til slut i dette kapitel vil vi dog præsentere stress og strain helt generelt (på tensorform) og her vil bulkdelen indgå.

3.3 Elasticitet

Et materiale der påføres en ydre kraft vil blive deformeret. Deformationen vil ske instantant og materialet vil finde tilbage til sit udgangspunkt når kraften ophører med at virke. Hvis kraften er tilstrækkelig lille vil forskydningerne i materialet være proportionale med kraften ligesom det er tilfældet for en Hookeske fjeder. Vi

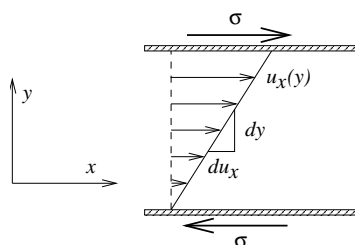
kalder dette for en elastisk deformation. For en sheardeformation (shearstrain) gælder relationen

$$\sigma = G\gamma \quad (3.3)$$

hvor G er **shearmodulet** givet i SI-enheden $[Pa]$. Jo større G er, des mere modstand gør stoffet mod at blive deformeret.

3.4 Viskositet

Væsker kan karakteriseres ved ikke at kunne modstå stresspåvirkninger. Hvis man påfører en væske et shearstress vil den begynde at flyde. Shearstresset afhænger ikke af strainet og ligning 3.3 gælder ikke. Derimod afhænger shearstresset af strainraten $\dot{\gamma}$, som er det tidsafledte strain. Det tidsafledte shearstrain kaldes for **shearraten**.



Figur 3.3 Hastighedsprofil af væske mellem to flader hvor den nederste flade har hastigheden 0 og den øverste u_x .

Hvis vi betragter en væske mellem to flader (figur 3.3) og den øverste flade bliver skubbet med hastigheden u_x , vil shearraten kunne defineres som

$$\dot{\gamma} = \frac{du_x}{dy} \quad (3.4)$$

Den fremkommer ved at differentiere γ med hensyn til tiden og da $\frac{dx}{dt} = u_x$. SI-enheden for $\dot{\gamma}$ er $[s^{-1}]$. For at kunne opretholde fladens hastighed u_x , skal der påføres et vedholdende shearstress. Forholdet mellem shearstresset og shearraten er givet ved Newtons lov for viskositet

$$\sigma = \mu\dot{\gamma} \quad (3.5)$$

Proportionalitetsfaktoren μ kaldes viskositeten, og er et mål for væskens modvilje mod at flyde. Den angives i SI-enheden $[Pa \cdot s]$. Den kinematiske viskositet ν er defineret som viskositeten divideret med densiteten, altså $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

En væske der opfylder ligning 3.5 og hvor viskositeten er uafhængig af shearraten kaldes en **newtonsk væske**. Viskositeten må gerne afhænge af andre størrelser, eksempelvis temperaturen og trykket. Hvis viskositeten afhænger af shearraten benyttes symbolet η istedet for μ .

3.5 Viskoelasticitet

Barnes et al. (1989), Godiksen & Larsen (2002), Hvidt (1998), Tanner (1988)

Man definerer elastiske og viskøse stoffer udfra om de opfylder ligning 3.3 eller ligning 3.5. Langt de fleste stoffer vil dog besidde både elastiske og viskøse egenskaber, og man kalder dem for viskoelastiske stoffer. Hvilken egenskab der kommer bedst til udtryk afhænger af varigheden af stresset. Ved at variere varigheden af stresset kan man få et stof til at opføre sig både elastisk og viskøst. Når man nu taler om hhv. væsker og faste stoffer menes hvordan de opfører sig i vores dagligdags tidsskala. Vand kalder man derfor en væske, omend det ved meget små tidsskalaer opfører sig elastisk. Vinduesglas betragtes som et fast stof, selvom det ved store tidsskalaer har viskøse egenskaber.

Da stoffers viskoelastiske opførsel afhænger af eksperimenttiden, er en variation af denne en oplagt mulighed for at få information om stoffet. En hel teoribygning, kaldet lineær responsteori, kan bruges til at beskrive eksperimenter hvor man f.eks. udsætter stoffet for harmoniske oscillationer. Hvis et viskoelastisk stof eksempelvis bliver udsat for en sinusoidal sheardeformation, vil sheardeformationen som funktion af tiden være givet ved

$$\gamma = \gamma(\omega, t) = \gamma_0 \cos(\omega t) = \text{Re} \left(\gamma_0 e^{i\omega t} \right) \quad (3.6)$$

hvor γ_0 er sheardeformations-amplituden og ω er vinkelfrekvensen ($\omega = 2\pi\nu$, hvor ν er frekvensen).

Shearraten findes ved at differentiere udtrykket

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(\omega, t) = -\gamma_0\omega \sin(\omega t) = \operatorname{Re} \left(i\omega\gamma_0 e^{i\omega t} \right) \quad (3.7)$$

Hvis amplituden γ_0 er så lille at systemet opfører sig lineært vil shearstress-outputtet variere tilsvarende i tiden, men ikke nødvendigvis i fase

$$\sigma = \sigma(\omega, t) = \sigma_0 \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} \left(\sigma_0 e^{i(\omega t + \phi)} \right) \quad (3.8)$$

Hvor σ_0 er shearstress-amplituden og ϕ faseforskydningen. Størrelsen på ϕ angiver om der er tale om en elastisk, viskøs eller blandet deformation. Hvis $\phi = 0$ ses at stress og strain er proportionale og der vil derfor ifølge ligning 3.3 være tale om en elastisk deformation. Hvis $\phi = \pi/2$ er det stress og shearrate der er proportionale og der vil ifølge ligning 3.5 være tale om en viskøs deformation. Vinkler mellem 0 og $\pi/2$ angiver en blandet deformation.

Selv om stress og deformation varierer i tiden, er det stadig muligt at bruge udtrykket $\sigma = G\gamma$ (ligning 3.3), så længe stress og strain opskrives på kompleks form. Realdelen af den komplekse form svarer så til virkelighedens stress/strain. Det komplekse shearmodul G^* defineres stadig som forholdet mellem stress og strain, altså som

$$\begin{aligned} \sigma^* &= G^* \gamma^* \\ &= (G' + iG'') \gamma^* \end{aligned} \quad (3.9)$$

hvor G' og G'' defineres som shearmodulets real- og imaginærdel. Det komplekse strain og stress er givet ved

$$\gamma^* = \gamma_0 e^{i\omega t} \quad (3.10)$$

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t + \phi)} \quad (3.11)$$

Indsætter nu ligning 3.10 i ligning 3.9 og tager realdelen for at få det faktiske stress

$$\sigma = \operatorname{Re} \left[(G' + iG'') \gamma_0 e^{i\omega t} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} [(G' + iG'')\gamma_0(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))] \\
&= \operatorname{Re} [G'\gamma_0 \cos(\omega t) - G''\gamma_0 \sin(\omega t) + i(G''\gamma_0 \cos(\omega t) + G'\gamma_0 \sin(\omega t))] \\
&= G'\gamma_0 \cos(\omega t) - G''\gamma_0 \sin(\omega t) \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Det faktiske stress kan altså skrives som en del der er i fase med strainet (proportionalt med $\cos(\omega t)$) og en der er $\pi/2$ radianer ude af fase (proportionalt med $\sin(\omega t)$).

G' og G'' kan fortolkes som stressets elastiske hhv. viskøse komponent. Dette ses ved at lade $G' \neq 0$ og $G'' = 0$. Så bliver $\sigma = G'\gamma_0 \cos(\omega t) = G'\gamma$. Men ifølge ligning 3.3 er $\sigma = G\gamma$ og derfor må $G' = G$. G' er altså et udtryk for den rene elasticitet.

Hvis vi omvendt lader $G' = 0$ og $G'' \neq 0$ fås $\sigma = -G''\gamma_0 \sin(\omega t) = -G''\dot{\gamma}/\omega$. Hvis vi sammenligner dette med ligning 3.5 som lød $\sigma = \eta\dot{\gamma}$ fås $\eta = G''/\omega$, og G'' er altså et udtryk for viskositeten. Det komplekse shearmodul G^* indeholder således både information om en væskes elastiske og viskøse egenskaber.

G' og G'' er såkaldte lineære viskoelastiske funktioner (af ω). Lineær viskoelasticitet bygger på antagelsen om at der er en lineær sammenhæng mellem stress og strain. Hvis strainamplituden er lille (som vi huskede at antage) er denne antagelse rimelig.

Når man ønsker at betragte elastisk og viskøs information under et, kan man i stedet vælge at betragte den komplekse viskositet $\eta^* = \eta' - \eta''$. Sammenhængen mellem det komplekse shearmodul og den komplekse viskositet er givet ved

$$G^* = i\omega\eta^* \tag{3.13}$$

hvilket ved simpel udregning giver at

$$G' = \omega\eta'' \tag{3.14}$$

$$G'' = \omega\eta' \tag{3.15}$$

3.6 En antagelse om elasticiteten i vores forsøg

Bird et al. (1987), Barnes et al. (1989), Arfken & Weber (1995)

Inden vi går videre i beskrivelsen af viskoelasticitet, vil vi præsentere en ikke fuldstændig underbygget antagelse vi opererer med i

dette projekt. Vi har nemlig valgt at antage at blodets og modelvæskens elastiske egenskaber er negligerbare under vores forsøgsbetingelser. Vi har ikke en værdi for elasticiteten, men den vil f.eks. kunne findes vha. den empiriske Cox-Merz regel, som vi nu kort vil introducere.

Vi betragter de to viskositetsfunktioner $\eta(\dot{\gamma})$ og $\eta^*(\omega)$, som afhænger af samme slags argument (med dimensionen s^{-1}). De vil begge i den nedre grænse for shearrate og frekvens gå mod værdien af η_0 (jf. afsnit 3.8), så derfor er

$$\eta^*(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \eta(\dot{\gamma})|_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \quad (3.16)$$

Det er også muligt at vise at de to funktioner begynder at aftage ved sammenlignelige værdier af $\dot{\gamma}$ og ω . Forskellen på de to funktioner finder hovedsagligt sted for store værdier af $\dot{\gamma}$ og ω . Mange har gennem tiden forsøgt at opstille en sammenhæng mellem de to funktioner og den mest succesfulde hidtil er den empiriske sammenhæng mellem $\eta(\dot{\gamma})$ og så størrelsen på den komplekse viskositet $\eta^*(\omega)$. Den siger at $\eta(\dot{\gamma})$ er den samme funktion af $\dot{\gamma}$ som $|\eta^*(\omega)|$ er af ω . Cox-Merz regel, som sammenhængen altså hedder, tager sig derfor således ud

Cox-Merz regel

$$\begin{aligned} \eta(\dot{\gamma}) &= |\eta^*(\omega)|_{\omega=\dot{\gamma}} \\ &= \left[(\eta')^2 + (\eta'')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Big|_{\omega=\dot{\gamma}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Elasticiteten er repræsenteret ved η'' som jo (jf. ligning 3.14) er identisk med G'/ω . I Cox-Merz regel indgår tre variable. Den ene, nemlig $\eta^*(\omega)$ (jf. afsnit 6.3), måler vi selv. Men η' og η'' kender vi ikke og vi har derfor en ligning med to ubekendte, som ikke kan løses entydigt.

Men hvis man betragter de såkaldte Kramer-Kronig relationer (hvorudfra det er muligt at beregne η'' ud fra η' og omvendt)

$$\eta''(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta'(x) - \eta'(\omega)}{\omega^2 - x^2} dx \quad (3.18)$$

$$\eta'(\omega) - \eta'(\infty) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\eta''(x) - \omega\eta''(\omega)}{x^2 - \omega^2} dx \quad (3.19)$$

har man nok information til at finde η'' i ligning 3.17. Dette har vi desværre ikke fundet tid til at gøre. Til gengæld vil vi i det følgende afsnit argumentere for, at det vi kalder for Maxwell-bidraget til imaginærdelen af den komplekse viskositet er forsvindende.

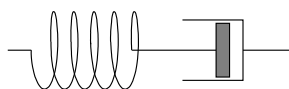
3.7 Maxwellmodellen

Whitmore (1968), Godiksen & Larsen (2002)

Hvis man ønsker en mere intuitiv forståelse af viskoelastiske systemer, kan det være en fordel at opstille simple f.eks. mekaniske modeller af systemet. Hertil skal man bruge en model af elasticitet og en af viskositet. Elasticitetens mekaniske analogi er en fjeder. I begge tilfælde sker deformationen instantant ved en kraftpåvirkning og de to størrelser, kraft og deformation, er proportionale (jf. ligning 3.3). Først når kraften ophører med at virke forsvinder deformationen. Den mekaniske analogi til viskositet er en støddæmper. For en støddæmper og en newtonsk væske sker der ikke en instantant deformation, når en kraft påtrykkes. Men de vil blive deformeret med en rate der er proportional med kraftens størrelse, så længe denne virker på dem (jf. ligning 3.5).

De to simpleste modeller af viskoelasticitet er en parallel hhv. serieforbindelse af fjederen og støddæmperen. Serieforbindelsen, som ses i figur 3.4 kaldes for et Maxwell-element og minder i opførsel meget om virkelige viskoelastiske væsker. Hvis man påvirker elementet med en kraft som hurtigt fjernes igen, vil kun fjederen nå at deformeres, og der er altså tale om elastisk opførsel. Hvis man i stedet påfører en kraft over længere tid, vil fjederen kun deformeres til at starte med, hvorimod støddæmperen vil deformeres så længe kraften påtrykkes. Når kraften fjernes igen finder fjederen tilbage til sin oprindelige tilstand i modsætning til støddæmperen der forbliver deformeret. Bortset fra fjederens deformation er der her tale om viskøs opførsel.

Sammenhængen mellem stress og strain for et Maxwell-element fås ved at kombinere de to tilsvarende ligninger for elastiske (ligning 3.3: $\sigma = G\gamma$) og viskøse stoffer (ligning 3.5: $\sigma = \eta\dot{\gamma}$). Da fjederen og støddæmperen sidder i serie, skal de enkelte strains (og dermed



Figur 3.4 En serieforbindelse af en fjeder og en støddæmper kaldes et Maxwell-element.

strainrate) adderes. Vi får den samlede strainrate af systemet til at være

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \dot{\gamma}_{fjeder} + \dot{\gamma}_{stoeddaemper} \\ &= \frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\eta}\end{aligned}\quad (3.20)$$

hvor vi har differentieret ligning 3.3 mht. tiden, for at få et udtryk for strainraten istedet for strainet. Ligning 3.20 omskrives til

$$\sigma + \lambda_m \dot{\sigma} = \eta \dot{\gamma} \quad (3.21)$$

hvor $\lambda_m = \frac{\eta}{G}$ er en tidskonstant kaldet Maxwells relaksationstid. En relaksationstid er den tid det tager molekylerne at omstrukturere sig i tilpasningen til nye betingelser, f.eks en deformation. Hvis deformationen sker hurtigere end væskens typiske relaksationstid vil væsken ikke kunne nå at blive omkonfigureret, og deformationen vil være elastisk.

Vi ønsker nu at løse ligning 3.21, hvilket svarer til at finde stresset som funktion af strainet. Hvis vi lader strainet (og dermed stresset) være harmonisk oscillerende funktioner, skrevet på kompleks form, vil løsning af ligningen bestå i at finde G' og G'' (se ligning 3.12).

Ifølge ligning 3.11 er $\sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ hvilket differentieret mht. tiden giver $\dot{\sigma}^* = i\omega \sigma_0 e^{i(\omega t + \phi)} = i\omega \sigma^*$. Da $\gamma^* = \gamma_0 e^{i\omega t}$ (jf. ligning 3.10) er $\dot{\gamma}^* = i\omega \gamma_0 e^{i\omega t} = i\omega \gamma^*$. Ved indsættelse i ligning 3.21 får den formen

$$\sigma^* + i\omega \lambda_m \sigma^* = i\omega \eta \gamma^* \Leftrightarrow \quad (3.22)$$

$$(1 + i\omega \lambda_m) \sigma^* = i\omega \eta \gamma^* \Leftrightarrow \quad (3.23)$$

$$\frac{\sigma^*}{\gamma^*} = \frac{i\omega \eta}{(1 + i\omega \lambda_m)} \quad (3.24)$$

Men da $G^* = \frac{\sigma^*}{\gamma^*}$ (jf. ligning 3.9) er

$$\begin{aligned} G^* &= \frac{i\omega\eta}{(1+i\omega\lambda_m)} \\ &= \frac{i\omega\eta(1-i\omega\lambda_m)}{(1+i\omega\lambda_m)(1-i\omega\lambda_m)} \\ &= \frac{\omega^2\eta\lambda_m}{1+\omega^2\lambda_m^2} + i\frac{\omega\eta}{1+\omega^2\lambda_m^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Heraf ses at $G' = \frac{\omega^2\eta\lambda_m}{1+\omega^2\lambda_m^2}$ og $G'' = \frac{\omega\eta}{1+\omega^2\lambda_m^2}$. Men da relaxationsstiden $\lambda_m = \frac{\eta}{G}$ fås

$$G' = \frac{G\omega^2\lambda_m^2}{1+\omega^2\lambda_m^2} \quad (3.26)$$

$$G'' = \frac{G\omega\lambda_m}{1+\omega^2\lambda_m^2} \quad (3.27)$$

Hvis man betragter den højfrequente grænse G_∞ af det komplekse shearmodul fås

$$\begin{aligned} G_\infty &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} G^* \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} G' + i \lim_{\omega \rightarrow \infty} G'' \\ &= G \cdot (1) + iG \cdot (0) \\ &= G \end{aligned} \quad (3.28)$$

For frekvenser gående mod uendelig består det komplekse shearmodul altså kun af et elasticitet-led, så ved højfrequente oscillationer er der ingen viskøs opførsel.

3.7.1 Maxwell-bidraget til imaginærdelen af viskositeten

Vi har som beskrevet i afsnit 3.6 valgt at antage, at blods elastiske egenskaber er negligerbare i vores forsøg. Dette kan vi ikke argumentere fuldstændigt for, men vi vil nu vurdere størrelsen af Maxwell-bidraget til elasticiteten (repræsenteret ved imaginærdelen af den komplekse viskositet) og se, at det ihvertfald er forsvindende.

Vi betragter derfor størrelsen af Maxwells relaksationstid λ_m for blod. Denne tidskonstant vil være i samme størrelsesorden som de typiske relaksationstider i væsken. Definitionen på λ_m var (hvor vi bruger G^* istedet for G , da vi betragter det oscillerende tilfælde)

$$\lambda_m = \frac{\eta}{G^*} \quad (3.29)$$

Hvis vi i stedet for G^* indsætter dens højfrekvente grænse G_∞ vil vi få den relaksationstid, hvor kun elasticiteten har betydning. Hvis den tid er betydelig mindre end de tider vi kører med i vores eksperiment (som er af størrelsesorden 1 s), vil denne form for elasticitet ikke have betydning i vores forsøg. For at relaksationstiden skal blive så stor som muligt indsætter vi den største værdi af η , nemlig η_0 (jf. afsnit 3.8), som er af størrelsesordenen $10^{-1} Pa \cdot s$. For langt de fleste væsker er G_∞ af størrelsesordenen $10^9 Pa$. Sammenlagt giver dette en relaksationstid i størrelsesordenen

$$\lambda_m \approx \frac{10^{-1} Pa \cdot s}{10^9 Pa} = 10^{-10} s \quad (3.30)$$

Først ved tider i størrelsesordenen $10^{-10} s$ og mindre vil væsken respondere udelukkende elastisk ved f.eks. en stresspåvirkning. De tider vi har med at gøre i dette projekt er som sagt betydelig større end $10^{-10} s$ og Maxwell-bidraget til væskens elasticitet er forsvindende.

Disse betragtninger er æquivalente til en vurdering af det såkaldte **Deborah tal**, som netop er forholdet mellem en karakteristisk tid for væsken λ og en karakteristisk tid for flowet t_{flow}

$$De = \frac{\lambda}{t_{flow}} \quad (3.31)$$

Vi valgte så den karakteristiske tid for væsken til $\lambda = \lambda_m$ og for flowet til $t_{flow} = 1 s$. Sidstnævnte er baseret på den korteste oscillationsperiode i vores forsøg, som er på 5 s. For mange flowsystemer er den kritiske værdi af Deborah tallet på omkring 1 (Bird et al.; 1987, s. 95). I vores tilfælde er $De = 10^{-10}$ s, som altså er betydelig mindre end 1.

Tiden λ_m var den tid hvor kun elasticiteten havde betydning. En karakteristisk tid hvor både viskositet og elasticitet spiller en rolle

er ifølge F J H Gijsen & Janssen (1999a) de røde blodlegemers relaxationstid, som er $\lambda = 0,06$ s. Så fås i stedet et Deborah tal på 0,012. Dette højere tal er stadig betydelig mindre end 1.

3.8 Generaliserede newtonske væsker

Bird et al. (1987), Tanner (1988)

Den simpleste udvidelse af den newtonske væske er den generaliserede newtonske væske. Med generaliseret newtonsk forstås at viskositeten ikke er konstant men afhænger af shearraten.

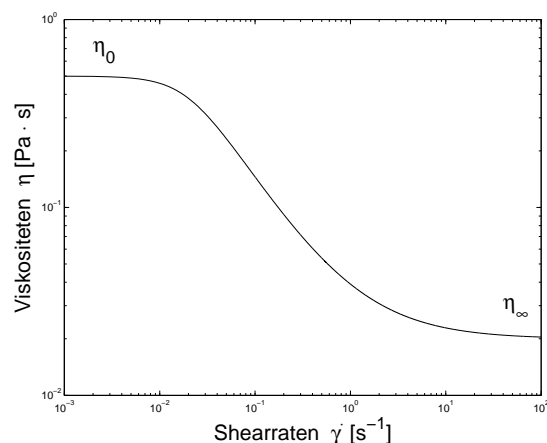
Den generaliserede newtonske væske kan, udover den shearrateafhængige viskositet, ikke beskrive andre egenskaber, såsom f.eks. elastiske effekter. Den kan derfor normalt kun benyttes i statiske væskestrømninger. Vi har dog valgt at undersøge om man kan betragte vores modelvæske som en generaliseret newtonske væske, i vores forsøg med oscillerende strømninger. Dette er meningsfuldt i det tilfælde hvor elasticiteten er negligerbar. Det mener vi er en rimelig antagelse (jf. afsnit 3.6 og 3.7.1).

Vi ved at blod afhænger af shearraten på en sådan måde, at viskositeten aftager for stigende shearrater. Væsker med denne opførsel kaldes for bløde væsker. Typiske eksempler på bløde væsker er polymeropløsninger (dvs. opløsninger af lange molekyler), hvor blod er en af dem. En forsimplet fysisk forklaring på den faldende viskositet er at molekylerne, istedet for at ligge tilfældigt rodet rundt, som de gør når væsken står stille, bliver mere ensrettede for stigende shearrate. Deres hovedakse kommer altså til at lægge på linie med flowets retning og viskositeten falder som følge deraf.

I figur 3.5 ses et eksempel på en blød væske. Viskositeten er plottet som funktion af shearraten i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem. Grafen har to tilnærmelsesvis newtonske områder, hhv. η_0 og η_∞ . Derimellem er der en ret linie som, da vi betragter et dobbeltlogaritmisk plot, indikerer at en potenslov gør sig gældende her. Hvis den skrives op som følgende

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1} \quad (3.32)$$

er den dimensionsløse eksponent $n < 1$, da det er en aftagende funktion. Jo mere forskellig n er fra 1, des mere ikke-newtonsk er



Figur 3.5 Blød væske der kan modelleres med Carreau-modellen.

væsken.

Hvis man ønsker en model der udover potenslov-området også beskriver de to newtonske områder kan man bruge den såkaldte Carreau-model

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \left[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.33)$$

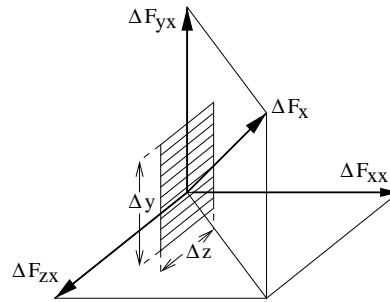
hvor λ er en tidskonstant og n , η_0 og η_{∞} er som før beskrevet. Til beskrivelse af vores modelvæskes ikke-newtonske viskositet vil vi bruge Carreau-modellen.

3.9 Stress- og straintensoren

Feynman (1964), Godiksen & Larsen (2002)

Vi har indtil nu kun betragtet stress og strain som skalarer. Dette har forekommet naturligt, da vi kun har betragtet simple shear-flows, svarende til det i figur 3.3 viste. I udledningen af Navier-Stokes bevægelsesligninger i kapitel 4 får vi brug for en generel notation i form af tensorer af anden orden (dvs. med to indicies).

Stresstensen beskriver de indre spændinger i et elastisk deformeret materiale. Hvis man tænker sig et snit igennem materialet, vil den ene side af materialet påvirke den anden med en kraft F , og



Figur 3.6 Kraften ΔF_x der virker på et lille areal $\Delta y \Delta z$, ortogonalt på x -aksen, kan deles op i de tre komponenter F_{xx} , F_{yx} og F_{zx} .

omvendt med en kraft $-F$. Lad os sige at snittet laves orthogonalt på x -aksen og kald de kraften der virker på et lille areal $\Delta y \Delta z$ for ΔF_x . Den kan opløses i sine tre komponenter (se figur 3.6) F_{xx} , F_{yx} og F_{zx} . Hvis vi dividerer hver af disse kræfter med arealet $\Delta y \Delta z$, defineres tre nye størrelser som vi kalder τ_{xx} , τ_{yx} og τ_{zx} . De beskriver kraften pr. areal i de tre forskellige retninger. Det første index beskriver altså i hvilken retning kraften peger og det sidste index beskriver retningen af arealets normal.

Hvis vi tænker os to tilsvarende snit ortogonalt på hhv. y - og z -retningen, defineres de tilsvarende størrelser τ_{xy} , τ_{yy} , τ_{zy} og τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{zz} . Disse ni størrelser opstilles på matriceform

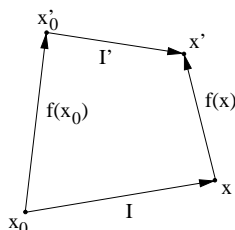
$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

og kaldes for stresstensoren. Det kan vises, at τ_{ij} er en tensor og at den beskriver de indre spændinger fuldstændigt. Det er ligeledes muligt at vise at τ_{ij} er symmetrisk, dvs. $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, og stresstensoren består således kun af seks forskellige elementer. Til ethvert punkt i materialet er der tilknyttet en stresstensor, så stresstensoren er et tensorfelt.

Kraften τ_{in} på et vilkårligt orienteret plan med normalvektor \mathbf{n} kan findes ud fra sammenhængen

$$\tau_{in} = \sum_j \tau_{ij} n_j \quad (3.35)$$

Lad os nu vende blikket mod straintensoren. Den bruges til at beskrive deformationen af et elastisk stof. Hvis vi til at starte med betragter forskydningen af et materiales enkelte dele, vil der både være tale om translation og rotation såvel som deformation. Forskellige del af materialet kan blive forskudt forskelligt, og kan beskrives med et forskydningsfelt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ der således afhænger af \mathbf{x} . Hvis vi lader punktet med stedvektor \mathbf{x} blive forskudt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ over i et punkt med stedvektor \mathbf{x}' (se figur 3.7), altså



Figur 3.7 Forskydninger i et elastisk medie.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.36)$$

og tilsvarende for punktet med stedvektor \mathbf{x}_0 : $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, så kan vi notere forskydningen af en 'lille nål' $\mathbf{l} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ over i \mathbf{l}' som

$$\begin{aligned} \mathbf{l}' &= \mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0 \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \\ &= \mathbf{l} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (3.37)$$

For små forskydninger kan man rækkeudvikle $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ omkring x_0 til første orden, hvilket giver

$$\begin{aligned} \mathbf{l}' &= \mathbf{l} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{l} \end{aligned} \quad (3.38)$$

som på komponentform har følgende form

$$l'_i = l_i + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} l_j \quad (3.39)$$

Da $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ikke udelukkende beskriver den deformation vi er interesserede i, gør vi følgende omskrivning og opdeling

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} &= \alpha_{ij} + \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

hvor α_{ij} og ε_{ij} kan vises at være hhv. rotations- og deformationsdelen af forskydningen. Ved ren translation er $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ konstant og både α_{ij} og ε_{ij} er nul. Da vi som sagt kun er interesserede i deformationer i forbindelse med straintensoren, defineres den som

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.41)$$

og beskriver altså hvorledes den 'lille nål' ændres ved deformation af det elastiske stof. Det ses umiddelbart at strain- ligesom stress-tensoren er symmetrisk. Ligning 3.39 får nu formen

$$l'_i = l_i + \varepsilon_{ij} l_j \quad (3.42)$$

I lineær elasticitetsteori antages lineær sammenhæng mellem stress og strain

$$\tau_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.43)$$

hvilket definerer den såkaldte elasticitetstensor C_{ijkl} . Den er en fjerde ordens tensor og har $3^4 = 81$ forskellige elementer, som dog pga. τ 's og ε 's symmetri kan reduceres til 36 forskellige, men ofte også færre. For et isotropt medie, dvs. et medie hvor der ikke eksisterer nogen foretrukket retning, vil shearmodulet G og bulkmodulet K indeholde tilstrækkelig information.

4 Navier-Stokes ligninger i rør

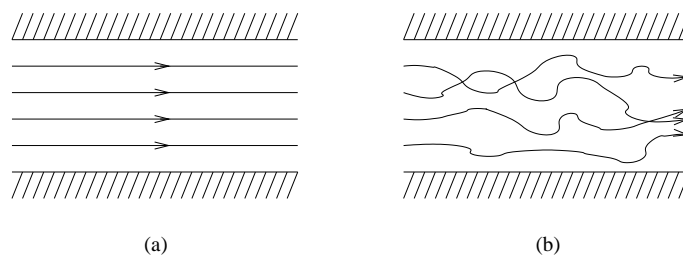
Navier-Stokes differentiaalligninger beskriver bevægelsen af kontinuerede medier. I dette kapitel vil vi præsentere ligningerne som de tager sig ud for hhv. newtonske og generaliserede newtonske væsker, og vi vil herunder særligt opstille ligningernes forsimplede form for vores rørgeometri. Løsningen af disse vil først ske i kapitel 5.

4.1 Turbulent strømning

Milnor (1982), Whitmore (1968), Caro et al. (1978), Jacobsen (1998), Rønne (1976)

Inden vi går i gang med at udlede Navier-Stokes differentiaalligninger vil vi beskrive fænomenet turbulens. I kapitel 10 vil vi vurdere om hvorvidt det finder sted i vores eksperiment.

Når en væske udsættes for en kraftpåvirkning, vil den begynde at flyde. Hvis det f.eks. er en væske der flyder i et rør, kunne kraften f.eks. stamme fra en trykgradient forårsaget af en trykforskel rørets ender imellem. Hvis trykgradienten er konstant, vil flowet være **stationært** og altså ikke ændre sig i tiden. Hvis trykgradienten derimod ikke er konstant, vil flowet heller ikke være det. En oscillerende trykgradient vil således forårsage et **oscillerende** flow.



Figur 4.1 Laminar (a) og turbulent strømning (b).

Disse betragtninger er betinget af at flowet er **laminart**. Med dette menes, at hvis man betragter væsken som værende opdelt i infinitesimale væskelag vil disse bevæge sig i parallelle baner uden at blive blandet. Hvis dette ikke er tilfældet kaldes flowet for **turbulent** (se figur 4.1). Turbulens er et fænomen vi gerne vil undgå i vores forsøg, da væsken opfører sig uforudsigelig og Navier-Stokes ligninger vil være vanskelige at løse.

Turbulens kan opstå når et flow skifter retning eller fart. **Reynoldstallet** \hat{Re} er en størrelse, der beskriver hvornår overgangen fra laminart til turbulent flow vil finde sted i en stationær strømning. \hat{Re} , der er et dimensionsløst tal, er et udtryk for forholdet mellem de inertielle og viskøse kræfter, og er for en rørstrømning givet ved

$$\hat{Re} = \frac{2R \cdot \langle u \rangle \cdot \rho}{\mu} \quad (4.1)$$

hvor $\langle u \rangle$ er flowets gennemsnitsfart og R rørets radius. For værdier større end den kritiske værdi $\hat{Re}_k = 2300$ (Pedley; 1980, s. 292) vil flowet være turbulent.

En anden interessant dimensionsløs parameter er **Womersley-tallet** α . Hvis væsken i et rør påføres en sinusoidal trykgradient angiver α i hvilken grad hastighedsprofilen adskiller sig fra det såkaldte Poiseuille flow (en stationær newtonsk væskes hastighedsprofil, jf. afsnit 5.2).

For en rørstrømning er α defineret som

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (4.2)$$

hvor R igen er rørets radius, ω vinkelfrekvensen og ν den kinematiske viskositet.

Womersley-tallet er også et mål for hvor store de inertielle kræfter er i forhold til de viskøse kræfter. Store Womersley-tal (betydeligt større end 1) er altså tegn på, at de inertielle kræfter dominerer, og væskens viskositet udbreder sig ikke langt fra rørets rand. Hastighedsprofilen vil være fladere end Poiseuille flowets.

For en oscillerende rørstrømning er det en kombination af \hat{Re} og α , der har betydning for om der opstår turbulens. Værdien af \hat{Re}_k er givet ved $250 \times \alpha$ (Pedley; 1980, s. 292). Det kan virke ulogisk

at jo større α er, des større kan også \hat{Re}_k tillade sig at være, uden at der opstår turbulens. Forklaringen er, at værdien af α vokser for stigende frekvens, og jo større frekvens des mindre tid til at turbulens kan opstå.

Denne højeste værdi af Reynold-tallet vil, ifølge ligning 4.1, finde sted ved den største gennemsnitsfart $\langle u \rangle_{max}$. I vores eksperiment er denne størrelse givet ved $\langle u \rangle_{max} = \frac{\omega \cdot A_V}{\pi R^2} = \frac{2\nu \cdot A_V}{R^2}$ (A_V er amplituden på vægkurven og R er rørets radius) og vi får

$$\begin{aligned} \hat{Re}_{max} &= \frac{2R \cdot \langle u \rangle_{max} \cdot \rho}{\mu} \\ &= \frac{2R \cdot \frac{2\nu \cdot A_V}{R^2} \cdot \rho}{\mu} \\ &= \frac{4\nu A_V \rho}{R\mu} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Når dette tal er mindre end $250 \times \alpha$ er flowet ikke turbulent.

Turbulens kan også opstå når vores væske flyder gennem indsnævringen i glasstudsene. Dette problem kan som strengeste betingelse betragtes som en strømning rundt om en kugle, hvor kuglens radius svarer til studsens radius inden indsnævringen (som er ca. 1 cm). Værdien af \hat{Re} er stadig givet ved ligning 4.1, hvor R så er kuglens radius. Den kritiske værdi \hat{Re}_k for en strømning om en kugle er så lav som 0,5 (Whitmore; 1968, s. 39), deraf betegnelsen strengeste betingelse.

4.2 Newtonsk væskestrømning

Bird et al. (1987), Acheson (1990)

I dette afsnit vil vi udlede Navier-Stokes bevægelsesligninger for inkompressible newtonske væsker.

Masse- og impulsbevarelsesligningerne

To grundlæggende ligninger styrer bevægelsen af kontinuerte medier. Den første er en massebevarelsesligning som udtrykker at nettoraten af masseflux til et lille fast volumen er lig raten af oplagring

af masse i systemet.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) \quad (4.4)$$

hvor $\mathbf{u} = [u_x(x,y,z), u_y(x,y,z), u_z(x,y,z)]$ er væskens hastighedsfelt angivet i kartetiske koordinater og ρ dens densitet. Hvis væsken har en konstant densitet over tid og sted, altså $\partial \rho / \partial t = 0$ og $\nabla \rho = 0$, så vil

$$\begin{aligned} 0 &= -(\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) \\ &= (\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) \\ &= (\nabla \rho \cdot \mathbf{u}) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ligning 4.5 gælder derfor for inkompressible væsker og kaldes for kontinuitetsligningen.

Den anden bevarelsesligning er en impulsbevarelsesligning som lyder

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{g} \quad (4.6)$$

hvor $\mathbf{g} = [0,0,g]$ er tyngdeaccelerationsvektoren og $\boldsymbol{\tau}$ stresstensoren.

For newtonske væsker er $\boldsymbol{\tau}$ givet ved

$$\boldsymbol{\tau} = -p\boldsymbol{\delta} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) - (2/3\mu - \kappa) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\delta} \quad (4.7)$$

hvor $(\nabla \mathbf{u})^\dagger$ er den transponerede af $\nabla \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\delta}$ er enhedstensoren, p er trykket og κ er bulkviskositeten. For inkompressible væsker får κ ikke relevans da det bagvedstående led $\nabla \cdot \mathbf{u}$ ifølge kontinuitetsligning 4.5 er lig nul. Ligning 4.7 får således formen

$$\boldsymbol{\tau} = -p\boldsymbol{\delta} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) \quad (4.8)$$

$$= -p\boldsymbol{\delta} + \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.9)$$

hvor $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger$ kaldes shearrate-tensoren. Stresstensoren $\boldsymbol{\tau}$'s første led $-p\boldsymbol{\delta}$ er det isotropiske trykbidrag svarende til hvis

væsken var inviskøs og det andet led $\mu\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ er bidraget fra de viskøse kræfter i væsken.

En ligning der tillægger $\boldsymbol{\tau}$ en værdi er en konstitutiv ligning. Ligning 4.8 er således den konstitutive ligning for inkompressible newtonske væsker. Skrevet ud har stresstensoren ifølge ligning 4.8 formen

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Hvis vi indsætter den konstitutive ligning 4.8 i ligning 4.6 fås, da μ er konstant, følgende

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{g} \\ &= (\nabla \cdot (-p\boldsymbol{\delta} + \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}})) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla \cdot (p\boldsymbol{\delta}) + \nabla \cdot (\mu\dot{\boldsymbol{\gamma}}) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p + \nabla \cdot \left(\mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger \right) \right) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left(\mu (\nabla \mathbf{u})^\dagger \right) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \left(\mu \nabla \mathbf{u}^\dagger \right) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.10)$$

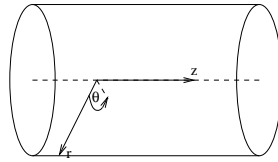
hvor vi i sidste skridt har brugt at væsken antages inkompressibel, altså $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Ligning 4.10 er en Navier-Stokes bevægelsesligning for inkompressible newtonske væsker med konstant viskositet μ . Den og kontinuitetsligning 4.5 udgør et ligningssystem som indeholder alt hvad vi bør vide om et væskeflow. For inkompressible newtonske væsker gælder altså følgende to bevægelsesligninger

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (4.11)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4.12)$$

4.2.1 Newtonsk væskestrømning i rør

Vi vil nu betragte den newtonske strømning, der finder sted i vores eksperiment. Vi har en newtonsk og inkompressibel væske der strømmer laminart og parallelt med rørets longitudinale akse, igennem et rør med radius R , drevet af en trykgradient $-\frac{\partial p}{\partial z}$. Da trykgradienten kun har en komponent i z -retningen, vil der ikke være flow i andre retninger. Hvis vi betragter flowet i cylindriske polære koordinater (se figur 4.2), vil komponenterne u_r og u_θ således være nul.



Figur 4.2 Cylindriske polære koordinater i en rørgometri.

På grund af trykgradientens endimensionale karakter vil hastighedsfeltet være rotationssymmetrisk og u_z afhænger derfor ikke af θ . Desuden må flowet være det samme hen igennem røret altså langs z -aksen, da trykgradienten er ens for alle værdier af z . Hastighedsfeltet får således den enkle form $\mathbf{u}(r, \theta, z, t) = (0, 0, u_z(r, t))$.

Den eneste måde \mathbf{u} kan komme til at afhænge af t er hvis trykgradienten afhænger af t . I de tilfælde hvor trykgradienten ikke ændrer sig i tiden, vil u_z altså antage den stationære form $u_z(r)$.

For at opskrive z -komponenten af ligning 4.11 får vi brug for Laplaceoperatoren i cylindriske polære koordinater. Den har følgende form

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.13)$$

Men da u_z ikke afhænger af θ og z , får z -komponenten af $\nabla^2 \mathbf{u}$ formen

$$\nabla^2 u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) u_z \quad (4.14)$$

Hvis vi yderligere antager at røret ligger horisontalt i tyngdefeltet er $g_z = 0$ og z -komponenten af Navier-Stokes ligning får formen

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (4.15)$$

Det ses at kontinuitetsligning 4.12 er opfyldt for $\mathbf{u}(r, \theta, z, t) = (0, 0, u_z(r, t))$ og at det kun er z -koordinaten der ikke giver en nul-ligning

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (4.16)$$

Ligning 4.15 og 4.16 får vi brug for i kapitel 5.

4.3 Ikke-newtonsk væskestrømning

I dette afsnit vil vi udlede Navier-Stokes bevægelsesligning for inkompressible generaliserede newtonske væsker, dvs. f.eks. væsker som har en shearrate-afhængig viskositet.

Massebevarelsesligning 4.4 gælder også for generaliserede newtonske væsker. Ved at antage at væsken er inkompressibel fik vi kontinuitetsligning 4.5. Kontinuitetsligningen gælder således også for inkompressible generaliserede newtonske væsker.

Impulsbevarelsesligning 4.6 gælder ligeledes for generaliserede newtonske væsker. Men da den konstitutive ligning har en anden form (da μ skiftes ud med η) vil Navier-Stokes ligning også se anderledes ud. Den konstitutive ligning for generaliserede newtonske væsker er

$$\boldsymbol{\tau} = -p\boldsymbol{\delta} + \eta\dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.17)$$

hvor viskositeten $\eta = \eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}})$ er en funktion af størrelsen af shearrate-tensoren $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, som er givet ved $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2}$. Hvis vi indsætter ligning 4.17 i impulsbevarelsesligning 4.6 fås

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \\ &= \nabla \cdot (-p\boldsymbol{\delta} + \eta\dot{\boldsymbol{\gamma}}) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla \cdot (p\boldsymbol{\delta}) + \nabla \cdot (\eta\dot{\boldsymbol{\gamma}}) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p + \nabla \cdot \left(\eta \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger \right) \right) + \rho \mathbf{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\nabla p + \nabla \eta \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) + \eta (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger)) + \rho \mathbf{g} \\
&= -\nabla p + \nabla \eta \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) + \eta (\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^\dagger)) + \rho \mathbf{g} \\
&= -\nabla p + \nabla \eta \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) + \eta (\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})) + \rho \mathbf{g} \\
&= -\nabla p + \nabla \eta \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

hvor vi i det sidste skridt har benyttet os af kontinuitetsligning 4.5. Ligning 4.18 er Navier-Stokes ligning for inkompressible generaliserede newtonske væsker. For inkompressible generaliserede newtonske væsker gælder altså følgende to bevægelsesligninger

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \eta \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (4.19)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4.20)$$

Hvis vi sammenligner de to Navier-Stokes ligninger for hhv. newtonske (ligning 4.11) og generaliserede newtonske væsker (ligning 4.19) er der i sidstnævnte et ekstra led, nemlig $\nabla \eta \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger)$. Dette led er nul hvis viskositeten er konstant (da $\nabla \eta = 0$), men altså forskellig fra nul når viskositeten afhænger af shearraten.

4.3.1 Ikke-newtonsk væskestrømning i rør

Hvis vi betragter et laminart generaliserede newtonsk væskeflow igennem et horisontalt rør med radius R og dermed hastighedsfelt $\mathbf{u}(r, \theta, z, t) = (0, 0, u_z(r, t))$ har vi udregnet z -komponenten af bevægelsesligning 4.19 til at have formen

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right) \quad (4.21)$$

som, da $u_z(r, t)$ kun afhænger af r og t , kan reduceres til

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right) \quad (4.22)$$

og derefter omskrives til

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (4.23)$$

Kontinuitetsligning 4.12 bliver som før

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (4.24)$$

Ligning 4.23 og 4.24 får vi brug for i kapitel 5.

5 Modellering af rørstrømmene

I dette afsnit vil vi løse Navier-Stokes bevægelsesligninger for vores rørgometri, som vi opstillede i kapitel 4. Vi vil altså finde hastighedsfelterne hørende til hhv. den newtonske og generaliserede newtonske væske, sidstnævnte modelleret med Carreau-viskositeten. Vi vil både finde løsninger for den oscillerende trykgradient, men også for den stationære, da forskellen de to væsker imellem er nemmere at betragte her. Indledningvis vil vi skematisere de fire bevægelsesligninger og angive de forhold der gør sig gældende for alle de fire tilfælde.

5.1 Generelle forhold

I tabel 5.1 side 36 er Navier-Stokes ligninger opstillet for de fire tilfælde. De to stationære tilfælde er fremkommet ved, at leddet $\rho \frac{\partial u_z}{\partial t}$ i de to tilsvarende oscillerende tilfælde er sat lig 0, da u_z ikke ændrer sig i tiden. Af samme årsag er trykgradienten her også angivet som $-\frac{dp}{dz}$ og ikke $-\frac{\partial p}{\partial z}$ (jf. afsnit 4.2.1), og ligeledes for u_z som kun afhænger af r .

For de fire tilfælde gælder kontinuitetsligning (se ligning 4.16 og 4.24)

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (5.1)$$

To randbetingelser gør sig gældende for alle fire tilfælde. Den første er den **fundamentale grænsebetingelse**. Den siger at hastigheden af en fluid ved en fast begrænsningsflade altid går mod nul når man nærmer sig fladen Jacobsen (1998). I en rørgometri betyder det at hastigheden u_z langs røret er nul, altså

$$u_z(R) = 0 \quad (5.2)$$

Væsketype	Trykgradient	Stationær	Oscillerende
Newtonsk		$0 = -\frac{dp}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right)$	$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$
Generaliseret newtonsk		$0 = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \eta \frac{du_z}{dr} \right)$	$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$

Tabel 5.1 Skema over de fire forskellige udgaver af Navier-Stokes bevægelsesligninger for vores rørgeometri.

Da u_z er aksesymmetrisk og ikke kan have et singulært punkt, må dens afledte i midten af røret være

$$\frac{\partial u_z(0)}{\partial r} = 0 \quad (5.3)$$

som er den anden randbetingelse.

Ud fra hastighedsfeltet $u_z(r, t)$ kan det tilhørende volumenflow (eller bare flow) $Q(t)$ beregnes. Det gøres ved at integrere $r \cdot u_z(r, t)$ op over hhv. θ og r

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot u_z(r, t) dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^R r \cdot u_z(r, t) dr \end{aligned} \quad (5.4)$$

I de to stationære tilfælde ændrer flowet sig ikke i tiden og $Q(t) = Q$.

Hvis vi integrerer ligning 5.4 op over t , får vi det i tiden kumulerede volumenflow, som vi har valgt at kalde nettoflowet $F(t)$

$$F(t) = \int Q(t) dt = \int 2\pi \int_0^R r \cdot u_z(r, t) dr dt \quad (5.5)$$

Dette er for os en interessant størrelse, da det er den vægten i vores eksperiment inddirekte registrerer. Vægten måler den kumulerede masse, men ved at dividere den med væskens densitet, fås netop nettoflowet.

5.2 Stationær strømning af en newtonsk væske

Vi vil nu finde hastighedsfeltet $u_z(r)$ og det tilhørende flow Q for en stationær strømning af en newtonsk væske i vores rørgeometri.

I følge tabel 5.1 vil Navier-Stokes ligning i dette tilfælde have formen

$$-\frac{dp}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = 0 \quad (5.6)$$

Finder u_z

$$-\frac{dp}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = 0 \Leftrightarrow \quad (5.7)$$

$$\int d \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \int r dr \Leftrightarrow \quad (5.8)$$

$$r \frac{du_z}{dr} = \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \frac{1}{2} r^2 + c_1 \Leftrightarrow \quad (5.9)$$

$$\frac{du_z}{dr} = \frac{dp}{dz} \frac{1}{2\mu} r + \frac{c_1}{r} \quad (5.10)$$

På grund af randbetingelse 5.3 må konstanten $c_1 = 0$, da $\frac{du_z}{dr}$ ellers ville gå mod uendelig (og således være forskellig fra nul) for $r = 0$. Så fås

$$\int du_z = \frac{dp}{dz} \frac{1}{2\mu} \int r \cdot dr \Leftrightarrow \quad (5.11)$$

$$u_z = \frac{dp}{dz} \frac{1}{4\mu} r^2 + c_2 \quad (5.12)$$

For at finde c_2 benytter vi os af randbetingelse 5.2 og vi får

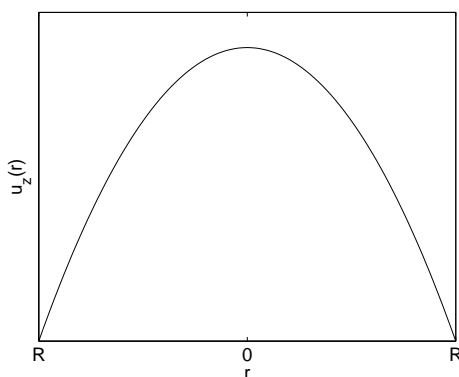
$$0 = \frac{dp}{dz} \frac{1}{4\mu} R^2 + c_2 \Leftrightarrow \quad (5.13)$$

$$c_2 = -\frac{dp}{dz} \frac{1}{4\mu} R^2 \quad (5.14)$$

og ved indsætning i ligning 5.12 fås

$$\begin{aligned} u_z(r) &= \frac{dp}{dz} \frac{1}{4\mu} r^2 - \frac{dp}{dz} \frac{1}{4\mu} R^2 \\ &= -\frac{dp}{dz} \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Dette er hastighedsfeltet for en stationær strømning af en newtonsk væske i vores rørgeometri. Det er kendt som Poiseuille hastighedsfeltet, og er en paraboloid. Hvis man afbilleder tværsnittet af dette



Figur 5.1 Poiseuille hastighedsprofil.

felt, får man en hastighedsprofil med form som en parabel, se figur 5.1.

Beregn det tilhørende flow

$$\begin{aligned}
 Q &= 2\pi \int_0^R r \cdot u_z(r) dr \\
 &= -2\pi \frac{dp}{dz} \frac{1}{4\mu} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr \\
 &= -\frac{dp}{dz} \frac{\pi}{2\mu} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr \\
 &= -\frac{dp}{dz} \frac{\pi}{2\mu} \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\
 &= -\frac{dp}{dz} \frac{\pi R^4}{8\mu}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Dette flow er tilsvarende kendt som Poiseuille flow.

5.3 Oscillerende strømning af en newtonsk væske

Fung (1990)

Vi vil nu finde hastighedsfeltet $u_z(r,t)$ og det tilhørende flow $Q(t)$ og nettoflow $F(t)$ for en oscillerende strømning af en newtonsk væske. Navier-Stokes ligning er ifølge tabel 5.1

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (5.17)$$

som vi omskriver til

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (5.18)$$

der differentieret med hensyn til z giver (da u_z ikke afhænger af z)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.19)$$

Hvilket fortæller os at trykgradienten $\partial p / \partial z$ ikke afhænger af z , men kun af t . Ifølge Dirichlet sætning kan enhver funktion, herunder enhver periodisk, skrives som en Fourierrække. Trykgradienten kan altså skrives som

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \quad (5.20)$$

Dette udtryk indsættes i ligning 5.18 og der fås

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\omega t} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (5.21)$$

Leddene med $n = 0$ svarer til tilfældet hvor trykgradienten er konstant. Løsningen hertil er Poiseuille hastighedsfeltet (jf. ligning 5.15). For de andre led gætter vi en løsning af formen

$$u_z = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r) e^{in\omega t} \quad (5.22)$$

Hvis man betragter den første randbetingelse (ligning 5.2), vil den være opfyldt netop hvis

$$v_n(R) = 0 \quad (5.23)$$

Den anden randbetingelse (ligning 5.3) er opfyldt hvis $v_n(r)$ differentieres med hensyn til r , er nul for $r = 0$

$$\frac{\partial v_n(0)}{\partial r} = 0 \quad (5.24)$$

Randbetingelserne vender vi tilbage til. Hvis vi indsætter udtrykket for u_z (ligning 5.22) i ligning 5.21, for nemheds skyld kalder $v_n(r) = v_n$ og betragter leddene enkeltvis¹ fås

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial (v_n e^{in\omega t})}{\partial t} &= -C_n e^{in\omega t} + \mu \left(\frac{\partial^2 (v_n e^{in\omega t})}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (v_n e^{in\omega t})}{\partial r} \right) \Leftrightarrow \\ i\rho n\omega e^{in\omega t} \cdot v_n &= -C_n e^{in\omega t} + \mu e^{in\omega t} \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_n}{\partial r} \right) \Leftrightarrow \\ i\rho n\omega v_n &= -C_n + \mu \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_n}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Vi vil nu omskive ligning 5.25 så den kommer på samme form som Bessels differentialligning

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0 \quad (5.26)$$

eller ækvivalent hvis den variable er $k\chi$ istedet

$$\chi^2 \frac{d^2 y(k\chi)}{d\chi^2} + \chi \frac{dy(k\chi)}{d\chi} + (k^2 \chi^2 - m^2)y(k\chi) = 0 \quad (5.27)$$

Løsningen til Bessels differentialligning, når den er på formen som i ligning 5.26, er

$$y = AJ_m(x) + BY_m(x) \quad (5.28)$$

hvor $J_m(x)$ er en Besselfunktion af første art med orden m og $Y_m(x)$ er en Besselfunktion af anden art med orden m . Løsningen til Bessels differentialligning på formen som i ligning 5.27 er

$$y = AJ_m(k\chi) + BY_m(k\chi) \quad (5.29)$$

¹ Det kan bevises at det n 'te led på venstresiden svarer til det n 'te led på højresiden.

Det skal senere vise sig at vi kun får brug for $J_m(x)$ som har formen

$$J_m(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(m+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2s} \quad (5.30)$$

eller mere præcist får vi brug for $J_0(k\chi)$ som altså er følgende sum

$$J_0(k\chi) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!s!} \left(\frac{k\chi}{2}\right)^{2s} \quad (5.31)$$

For at omskrive ligning 5.25 til Besselform er det nødvendigt at lave substitutionen $y_n = v_n + C_n/i\rho n\omega \Rightarrow i\rho n\omega y_n = i\rho n\omega V_n + C_n$ for at få fjernet leddet med C_n . Det ses at de afledte af y_n er lig de tilsvarende afledte af v_n og vi får ligning 5.25 omskrevet til

$$\begin{aligned} i\rho n\omega v_n + C_n &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_n}{\partial r} \right) \Leftrightarrow \\ i\rho n\omega y_n &= \mu \left(\frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y_n}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Så fås

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial y_n}{\partial r} - i\rho n\omega y_n \\ &= \mu \frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial y_n}{\partial r} + i^3 \rho n\omega y_n \\ &= \frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y_n}{\partial r} + \frac{i^3 \rho n\omega y_n}{\mu} \\ &= \frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y_n}{\partial r} + \frac{i^3 n\omega y_n}{\nu} \\ &= r^2 \frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} + r \frac{\partial y_n}{\partial r} + \frac{i^3 n\omega}{\nu} r^2 y_n \\ &= r^2 \frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} + r \frac{\partial y_n}{\partial r} + \left(\frac{i^3 n\omega}{\nu} r^2 - 0 \right) y_n \end{aligned} \quad (5.33)$$

Udtrykket i ligning 5.33 har netop form som Bessels differentilligning 5.27 hvor $k = \sqrt{\frac{i^3 n\omega}{\nu}}$, $\chi = r$ og ordenen $m = 0$. Løsningen må således være en linearkombination af $J_0(kr)$ og $Y_0(kr)$

$$y_n(r) = A_n J_0 \left(\sqrt{\frac{i^3 n \omega}{\nu}} r \right) + B_n Y_0 \left(\sqrt{\frac{i^3 n \omega}{\nu}} r \right) \quad (5.34)$$

Da vi havde benyttet substitutionen

$$\begin{aligned} y_n &= v_n + \frac{C_n}{i\rho n\omega} \Leftrightarrow \\ v_n &= y_n - \frac{C_n}{i\rho n\omega} \Leftrightarrow \\ v_n &= y_n + \frac{iC_n}{\rho n\omega} \end{aligned} \quad (5.35)$$

får vi den tilsvarende v_n -løsning til

$$v_n(r) = A_n J_0 \left(\sqrt{\frac{i^3 n \omega}{\nu}} r \right) + B_n Y_0 \left(\sqrt{\frac{i^3 n \omega}{\nu}} r \right) + \frac{iC_n}{\rho n\omega} \quad (5.36)$$

Inden vi finder konstanterne A_n og B_n indfører vi en ny variabel $\alpha = R\sqrt{\omega/\nu}$ kaldet Womersley-tallet. Det er et dimensionsløst tal, hvis fysiske betydning vil blive beskrevet i afsnit 5.3.1. Løsningen i ligning 5.36 får nu formen

$$v_n(r) = A_n J_0 \left(\alpha \frac{r}{R} n^{1/2} i^{3/2} \right) + B_n Y_0 \left(\alpha \frac{r}{R} n^{1/2} i^{3/2} \right) + \frac{iC_n}{\rho n\omega} \quad (5.37)$$

Betragter nu randbetingelsen 5.24. Vi ved at J'_0 går mod 0 for r gående mod 0, hvorimod Y'_0 går mod uendelig. Derfor må $B_n = 0$. Randbetingelsen 5.23 giver værdien af A_n

$$A_n J_0(\alpha n^{1/2} i^{3/2}) + \frac{iC_n}{\rho n\omega} = 0 \Leftrightarrow \quad (5.38)$$

$$A_n = -\frac{iC_n}{\rho n\omega J_0(\alpha n^{1/2} i^{3/2})} \quad (5.39)$$

A_n og B_n indsættes i ligning 5.37 og vi får

$$v_n(r) = \frac{iC_n}{\rho n\omega} \left[1 - \frac{J_0(\alpha \frac{r}{R} n^{1/2} i^{3/2})}{J_0(\alpha n^{1/2} i^{3/2})} \right] \quad (5.40)$$

Endelig fås u_z -løsningen ved at indsætte ligning 5.40 i ligning 5.22

$$u_z(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iC_n}{\rho n\omega} \left[1 - \frac{J_0(\alpha \frac{r}{R} n^{1/2} i^{3/2})}{J_0(\alpha n^{1/2} i^{3/2})} \right] \right) e^{in\omega t} \quad (5.41)$$

5.3.1 Womersley-tallet

I ligning 5.41 har vi hastighedsfeltet u_z for en newtonsk væske, der flyder igennem et stift rør med trykgradient givet ved ligning 5.20. Det ses at u_z afhænger af Womersley-tallet α , som er givet ved

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (5.42)$$

hvor R er en karakteristisk længde, hvilket i tilfældet med et rør vil være dets radius (hvorfor vi netop valgte bogstavet R). ω er en karakteristisk frekvens, som i vores tilfælde er vinkelfrekvensen.

Womersley-tallet er et mål for hvor store de transiente inertielle kræfter er i forhold til de viskøse kræfter. Store Womersley-tal (betydelig større end 1) er altså tegn på at de transiente inertielle kræfter dominerer, og væskens viskositet vil ikke udbrede sig langt fra randen, hvilket udmyndiger sig i en flad hastighedsprofil.

I figur 5.2 er de teoretiske hastighedsprofiler for en harmonisk trykgradient plottet for fire forskellige værdier af α . Det ses at hastighedsprofilen bliver fladere for stigende værdier af α .

5.3.2 En sinusoidal trykgradient

Vi har regnet på det konkrete eksempel hvor trykgradienten er givet ved

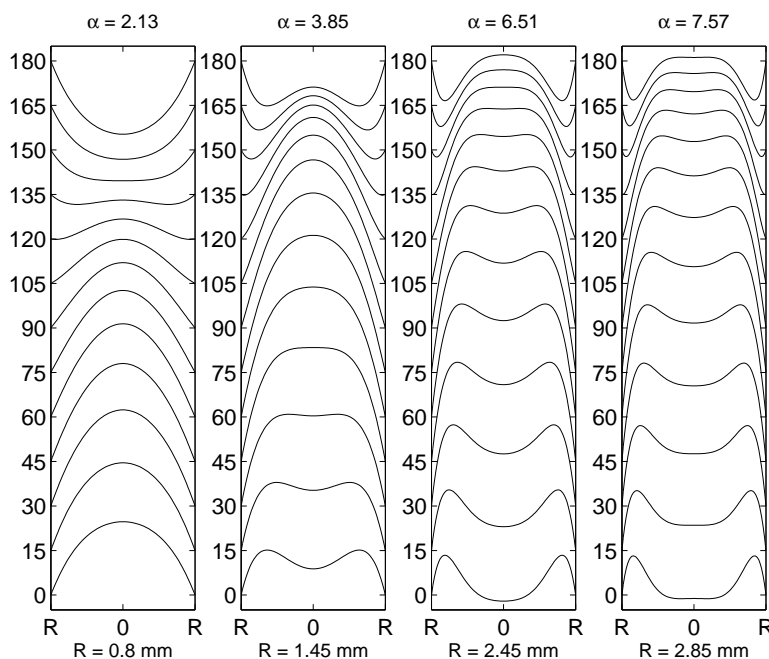
$$\frac{dp}{dz} = -A \cos(\omega t) \quad (5.43)$$

hvilket svarer til den trykgradient, vi vil operere med i vores forsøg. Opskrevet på formen som i ligning 5.20

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \quad (5.44)$$

fås ved at sætte $C_1 = -A$ og $C_n = 0$ for $n \neq 1$, og dernæst tage realdelen af summen, altså

$$\frac{dp}{dz} = \operatorname{Re}(-Ae^{i\omega t}) \quad (5.45)$$



Figur 5.2 Teoretiske hastighedsprofiler for et newtonsk væskeflow igennem et rør med en trykgradient på $-A \cos \omega t$ og fire forskellige værdier af Womersley-tallet α . Profilerne er plottet i step af $\Delta \omega t = 15^\circ$. For $\omega t > 180^\circ$ er hastighedsprofilerne det samme som for $180^\circ < \omega t < 0^\circ$.

Hastighedsfeltet (ligning 5.41) hørende til denne trykgradient får derfor formen

$$u_z(r,t) = \operatorname{Re} \left[\frac{-iA}{\rho\omega} \left(1 - \frac{J_0(\alpha \frac{r}{R} i^{3/2})}{J_0(\alpha i^{3/2})} \right) e^{i\omega t} \right] \quad (5.46)$$

$$= \operatorname{Re} \left[\frac{iA}{\rho\omega} \left(\frac{J_0(\alpha \frac{r}{R} i^{3/2})}{J_0(\alpha i^{3/2})} - 1 \right) e^{i\omega t} \right] \quad (5.47)$$

Hvor vi har husket at tage realdelen af udtrykket.

Vi vil nu beregne det tilhørende flow og nettoflow. I evalueringen af disse to integraler vil vi tillade os at lade integrationskonstanterne være nul, da vi kun er interesserede i det periodiske forløb.

Vi starter med at beregne flowet $Q(t)$ efter ligning 5.4

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= 2\pi \int_0^R r \cdot u_z(r,t) dr \\
 &= 2\pi \int_0^R r \operatorname{Re} \left[\frac{iA}{\rho\omega} \left(\frac{J_0(\alpha \frac{r}{R} i^{3/2})}{J_0(\alpha i^{3/2})} - 1 \right) e^{i\omega t} \right] dr \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{2\pi Ai}{\rho\omega} \int_0^R \left(r \frac{J_0(\alpha \frac{r}{R} i^{3/2})}{J_0(\alpha i^{3/2})} - r \right) dr e^{i\omega t} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{2\pi Ai}{\rho\omega} \left(\frac{1}{J_0(\alpha i^{3/2})} \int_0^R r J_0(\alpha \frac{r}{R} i^{3/2}) dr - \int_0^R r dr \right) e^{i\omega t} \right]
 \end{aligned}$$

For at evaluere det første integrale bruger vi at² $\int r J_0(r) dr = r J_1(r) \Rightarrow \int r J_0(kr) dr = \frac{r}{k} J_1(kr)$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{2\pi Ai}{\rho\omega} \left(\frac{1}{J_0(\alpha i^{3/2})} \left[\frac{Rr}{\alpha i^{3/2}} J_1(\alpha \frac{r}{R} i^{3/2}) \right]_0^R - \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R \right) e^{i\omega t} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{2\pi Ai}{\rho\omega} \left(\frac{1}{J_0(\alpha i^{3/2})} \frac{R^2}{\alpha i^{3/2}} J_1(\alpha \frac{R}{R} i^{3/2}) - \frac{R^2}{2} \right) e^{i\omega t} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 Ai}{\rho\omega} \left(\frac{2J_1(\alpha i^{3/2})}{\alpha i^{3/2} J_0(\alpha i^{3/2})} - 1 \right) e^{i\omega t} \right] \tag{5.48}
 \end{aligned}$$

hvor $J_0(x)$ og $J_1(x)$ med $x = \alpha i^{3/2}$ ifølge ligning 5.30 ser ud som følger

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!s!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2s} \tag{5.49}$$

$$J_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(1+s)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{1+2s} \tag{5.50}$$

² Ifølge (Spiegel; 1996, s. 142).

Inden vi går over til at finde nettoflowet, vil vi beregne den asymptotiske opførsel af $Q(t)$, med henblik på at betragte faseforskellen mellem trykgradient og flow.

Vi starter med at betragte det lavfrekvente tilfælde. Rent intuitivt vil vi forvente at denne grænseværdi er i fase med trykgradienten (givet ved $-A \cos \omega t$), da flowet så at sige kan nå at følge med trykinputtet. Dette vil i så fald give os en grænseværdi der svarer til Poiseuille flowet (jf. ligning 5.16)

Vi regner først på udtrykket inde i den runde parentes i ligning 5.48. Vi medtager første og anden ordensleddene fra $J_0(x)$ - og $J_1(x)$ -rækken og får derfor

$$\begin{aligned} \left(\frac{2J_1(\alpha i^{3/2})}{\alpha i^{3/2} J_0(\alpha i^{3/2})} - 1 \right) &\cong \frac{2 \left(\left(\frac{\alpha i^{3/2}}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha i^{3/2}}{2} \right)^3 \right)}{\alpha i^{3/2} \left(1 - \left(\frac{\alpha i^{3/2}}{2} \right)^2 \right)} - 1 \\ &= \frac{\alpha i^{3/2} \left(1 - \frac{1}{8} (\alpha i^{3/2})^2 \right)}{\alpha i^{3/2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} i \right)} - 1 \\ &= \frac{1 + \frac{\alpha^2}{8} i}{1 + \frac{\alpha^2}{4} i} - 1 \\ &= \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2}{8} i \right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{4} i \right)}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{4} i \right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{4} i \right)} - 1 \\ &= \frac{1 - \frac{\alpha^2}{8} i + \frac{\alpha^4}{32}}{1 + \frac{\alpha^4}{16}} - 1 \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\cong \frac{1 - \frac{\alpha^2}{8} i}{1} - 1 \quad (5.52)$$

$$= -\frac{\alpha^2}{8} i \quad (5.53)$$

$$= -\frac{R^2 \omega}{8\nu} i \quad (5.54)$$

hvor vi fra ligning 5.51 til 5.52 har smidt alle led større end anden orden væk. Fra ligning 5.53 til ligning 5.54 har vi indsat definitionen af Womersley-tallet (jf. ligning 5.42).

Betragter nu den samlede grænseværdi af udtrykket i ligning 5.48

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow 0} Q(t) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 Ai}{\rho \omega} \left(\frac{2J_1(\alpha i^{3/2})}{\alpha i^{3/2} J_0(\alpha i^{3/2})} - 1 \right) e^{i\omega t} \right] \\
&= \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 Ai}{\rho \omega} \left(-\frac{R^2 \omega}{8\nu} i \right) e^{i\omega t} \right] \\
&= \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^4 A}{8\rho\nu} e^{i\omega t} \right] \\
&= \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^4 A}{8\mu} e^{i\omega t} \right] \\
&= \frac{\pi R^4 A}{8\mu} \cos \omega t \tag{5.55}
\end{aligned}$$

Det ses at grænseværdien er proportionalt med trykinputtet $-A \cos \omega t$ og er et Poiseuille flow hvor $dp/dz = -A \cos(\omega t)$ hvilket netop var hvad vi forventede.

Betragter nu det højfrequente tilfælde. Her kunne man forestille sig at flowets amplitude ville være forsvindende, da der ikke når at flyde noget igennem røret inden strømmen skifter retning. Flowet kunne tænkes at være faseforskudt i forhold til trykgradienten. Vi regner på hvor meget.

For store x vil

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \tag{5.56}$$

som vi kan bruge til at regne på forholdet mellem de to Besselfunktioner i 5.48 (sætter $x = \alpha i^{3/2}$)

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{J_1(\alpha i^{3/2})}{J_0(\alpha i^{3/2})} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\cos(x - \frac{3\pi}{4})}{\cos(x - \frac{\pi}{4})} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{e^{ix} e^{-\frac{3\pi}{4}i} + e^{-ix} e^{\frac{3\pi}{4}i}}{e^{ix} e^{-\frac{\pi}{4}i} + e^{-ix} e^{\frac{\pi}{4}i}} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2ix} e^{\frac{3\pi}{2}i}}{e^{\frac{\pi}{2}i} + e^{-2ix} e^{\pi i}} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2ix} \cdot i}{i - e^{-2ix}} \tag{5.57}
\end{aligned}$$

Indsætter $x = \alpha i^{3/2}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{2\sqrt{i}\alpha} \cdot i}{i - e^{2\sqrt{i}\alpha}} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{2(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\alpha} \cdot i}{i - e^{2(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\alpha}} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{2(1+i)\sqrt{2}\alpha} \cdot i}{i - e^{2(1+i)\sqrt{2}\alpha}} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{e^{-2\sqrt{2}\alpha} - e^{i2\sqrt{2}\alpha} \cdot i}{ie^{-2\sqrt{2}\alpha} - e^{i2\sqrt{2}\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Da α går mod uendelig når ω gør, bliver det første led i hhv. tæller og nævner nul

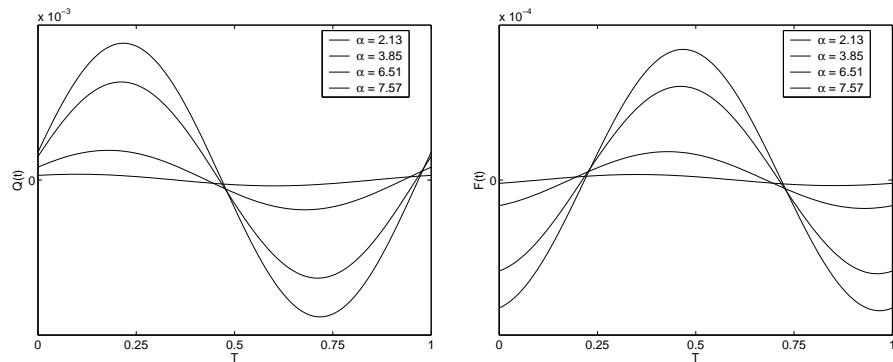
$$\begin{aligned}
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{0 - e^{i2\sqrt{2}\alpha} \cdot i}{0 - e^{i2\sqrt{2}\alpha}} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-e^{i2\sqrt{2}\alpha} \cdot i}{-e^{i2\sqrt{2}\alpha}} \\
&= i
\end{aligned} \tag{5.59}$$

som indsættes i den samlede grænseværdi af flowet i ligning 5.48

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow \infty} Q(t) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 Ai}{\rho \omega} \left(\frac{2J_1(\alpha i^{3/2})}{\alpha i^{3/2} J_0(\alpha i^{3/2})} - 1 \right) e^{i\omega t} \right] \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 Ai}{\rho \omega} \left(\frac{2i}{\alpha i^{3/2}} - 1 \right) e^{i\omega t} \right] \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 Ai}{\rho \omega} \left(\frac{2}{\alpha i^{1/2}} - 1 \right) e^{i\omega t} \right] \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 Ai}{\rho \omega} (0 - 1) e^{i\omega t} \right] \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 Ai}{\rho \omega} (-\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 A}{\rho \omega} (-i \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \right] \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\pi R^2 A}{\rho \omega} \sin(\omega t) \tag{5.60}
\end{aligned}$$

Vi får altså et flow som er $\pi/2$ radianer forsinket i forhold til trykgradienten (svarende til faseforskydningen mellem en cosinus- og en sinusfunktion). Selve amplituden vil for ω gående mod uendelig være forsvindende, hvilket vi forventede.



Figur 5.3 Til venstre ses grafer for $Q(t)$ for de fire hastighedsprofiler (med forskellige Womersley-tal) vist i figur 5.2. Til højre er de tilhørende værdier for nettoflowet $F(t)$ afbilledet.

Vil vi nu vende tilbage og finde nettoflowet $F(t)$, som findes ved at tage tidsintegralet af flowet i ligning 5.48

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 A i}{\rho \omega} \left(\frac{2J_1(\alpha i^{3/2})}{\alpha i^{3/2} J_0(\alpha i^{3/2})} - 1 \right) e^{i\omega t} \right] dt \\
&= \operatorname{Re} \left[\frac{\pi R^2 A}{\rho \omega^2} \left(\frac{2J_1(\alpha i^{3/2})}{\alpha i^{3/2} J_0(\alpha i^{3/2})} - 1 \right) e^{i\omega t} \right] \tag{5.61}
\end{aligned}$$

Læg mærke til at flowet $F(t)$ er faseforskydet $\pi/2$ i forhold til $Q(t)$. Det ses også at $F(t)$ er proportionalt med trykamplituden A .

I figur 5.3 er flow og nettoflow for forskellige værdier af Womersley-tallet afbilledet over en periode. Det er kurven for nettoflowet som vores newtonske glycerinopløsning i teorien burde følge.

5.4 Stationær strømning af en generaliseret newtonsk væske

Vi ønsker nu at finde hastighedsfeltet $u_z(r)$ og det tilhørende flow Q for en stationær strømning af en generaliseret newtonsk væske. Navier-Stokes ligning er ifølge tabel 5.1

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r\eta \frac{du_z}{dr} \right) \quad (5.62)$$

som omskrives til (sætter igen integrationskonstanten til at være nul)

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} r &= \frac{d}{dr} \left(r\eta \frac{du_z}{dr} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{dp}{dz} \int r dr &= \int d \left(r\eta \frac{du_z}{dr} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{dp}{dz} \frac{1}{2} r^2 &= r\eta \frac{du_z}{dr} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r &= \eta \frac{du_z}{dr} \end{aligned} \quad (5.63)$$

Vi ønsker at modellere væskens viskositet med Carreau-modellen (jf. ligning 5.64)

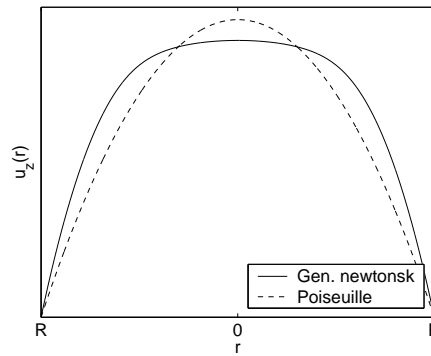
$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda \dot{\gamma})^a]^{\frac{n-1}{a}} \quad (5.64)$$

hvor $\dot{\gamma} = \frac{du_z}{dr}$. Da η således afhænger af $\frac{du_z}{dr}$ kan ligning 5.63 ikke løses analytisk, og vi benytter os istedet af det numeriske værktøj MatLab.

Udtrykket i ligning 5.63 kan skrives som en funktion af du_z/dr og r

$$F \left(\frac{du_z}{dr}, r \right) = \eta \frac{du_z}{dr} - \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r = 0 \quad (5.65)$$

som med indsættelse af udtrykket for η giver



Figur 5.4 På figuren er hastighedsprofilen for en stationær strømning af en generaliseret newtonsk væske afbilledet sammen med den paraboliske hastighedsprofil for den tilsvarende newtonske strømning.

$$F\left(\frac{du_z}{dr}, r\right) = \left[(\eta_0 - \eta_\infty) \left[1 + \left(\lambda \frac{du_z}{dr} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} + \eta_\infty \right] \frac{du_z}{dr} - \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r = 0 \quad (5.66)$$

MatLab løser ligning 5.66 ved for hver værdi af r , at finde den værdi af du_z/dr der opfylder ligningen. F har netop et sådant nulpunkt, da den er en kontinuert monotont aftagende funktion.

Vi har fået Matlab til at lave et plot af hastighedsprofilen $u_z(r)$ i figur 5.4. Poiseuille hastighedsprofilen (se ligning 5.15) for den tilsvarende newtonske væske er også afbilledet. Det ses tydeligt, at den generaliserede newtonske væskes profil har en mere fladtrykt karakter.

5.5 Oscillerende strømning af en generaliseret newtonsk væske

Arfken & Weber (1995)

Vi ønsker nu at finde hastighedsfeltet $u_z(r,t)$ og det tilhørende flow $Q(t)$ for det fjerde og sidste tilfælde, som er den oscillerende strømning af en generaliseret newtonsk væske. Navier-Stokes ligning er ifølge tabel 5.1

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (5.67)$$

hvor vi igen bruger Carreau-modellen (jf. ligning 5.64) til at beskrive viskositeten og derfor ikke kan løse ligning 5.67 analytisk. Ligningen er en såkaldt parabolisk partiel differentialligning, som kan løses numerisk med MatLab-funktionen *pdepe*³, der løser både paraboliske og elliptiske partielle differentialligninger på formen

$$C \left(r, t, u, \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = r^{-m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m f \left(r, t, \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + s \left(r, t, u, \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (5.68)$$

hvor $t_0 \leq t \leq t_f$, $a \leq r \leq b$ og $[a, b]$ er et endeligt interval. Ved cylindersymmetri som vores rørgometri besidder er $m = 1$, hvilket passer når man sammenligner ligning 5.67 og 5.68 (i dette tilfælde skal $0 \leq a$).

I relation til vores eksperiment sættes $a = 0$ og $b = R$ (rørets radius) og vi vælger tiden til at løbe fra 0 til et passende antal perioder. Desuden ses, at

$$u = u_z \quad (5.69)$$

$$C = \rho \quad (5.70)$$

$$f = \eta \frac{du_z}{dr} \quad (5.71)$$

$$s = \frac{dp}{dz} \quad (5.72)$$

Der skal angives en begyndelseshastighed $u(r, t_0) = u_0(r)$. Den sætter vi ligeledes til 0, da programmet får lov til at køre nogle perioder til u kommer i ligevægt.

Programmet skal som input have fire randbetingelser, som skal præsenteres på formen

$$p(r, t, u) + q(r, t) f \left(r, t, u, \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.73)$$

³ *pdepe* står for partial differential equations parabolic and elliptic.

Man skal altså finde udtryk for både $p(r,t,u)$ og $q(r,t)$ for alle t ved hhv. $r = a$ og $r = b$. Som før er $f = \eta \frac{du_z}{dr}$.

Vores første randbetingelse er (jf. ligning 5.2)

$$\begin{aligned} u_z(R) &= 0 & \Rightarrow \\ u_z(R,t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.74)$$

da betingelsen gælder for alle tider. Ved at sætte funktionerne $p = u_z$ og $q = 0$ for $r = R$ kommer randbetingelsen på den ønskede form, hvilket ses af følgende

$$\begin{aligned} p(r,t,u) + q(r,t)f\left(r,t,u,\frac{\partial u}{\partial r}\right) &= 0 & \Rightarrow \\ p(R,t,u) + q(R,t)\eta \frac{du_z}{dr} &= 0 & \Rightarrow \\ u_z(R,t) + 0 \cdot \eta \frac{du_z}{dr} &= 0 & \Rightarrow \\ u_z(R,t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.75)$$

hvor den sidste implikation er sand da $\eta \frac{du_z}{dr}$ er endelig for $r = R$.

Den anden randbetingelse er (jf. ligning 5.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z(0)}{\partial r} &= 0 & \Rightarrow \\ \frac{\partial u_z(0,t)}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (5.76)$$

som kan omskrives til den ønskede form i ligning 5.73 hvis man for $r = 0$ sætter $p = 0$ og $q = \text{konstant}$, f.eks. $q = 1$. Det ses af følgende udregninger

$$\begin{aligned} p(r,t,u) + q(r,t)f\left(r,t,u,\frac{\partial u}{\partial r}\right) &= 0 & \Rightarrow \\ p(0,t,u) + q(0,t)\eta \frac{\partial u_z}{\partial r} &= 0 & \Rightarrow \\ 0 + 1 \cdot \eta \frac{\partial u_z}{\partial r} &= 0 & \Rightarrow \\ \eta \frac{\partial u_z}{\partial r} &= 0 & \Rightarrow \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= 0 & \Rightarrow \\ \frac{\partial u_z(0,t)}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (5.77)$$

hvor den næstsidste implikation er sand da η aldrig er nul og $\frac{\partial u_z}{\partial r}$ således må være det.

Ved begge randbetingelser opfylder q -funktionen enten at være nul (første randbetingelse) eller aldrig at være nul (sidste randbetingelse).

Randbetingelserne bliver således

$$p(a) = 0 \quad (5.78)$$

$$q(a) = 1 \quad (5.79)$$

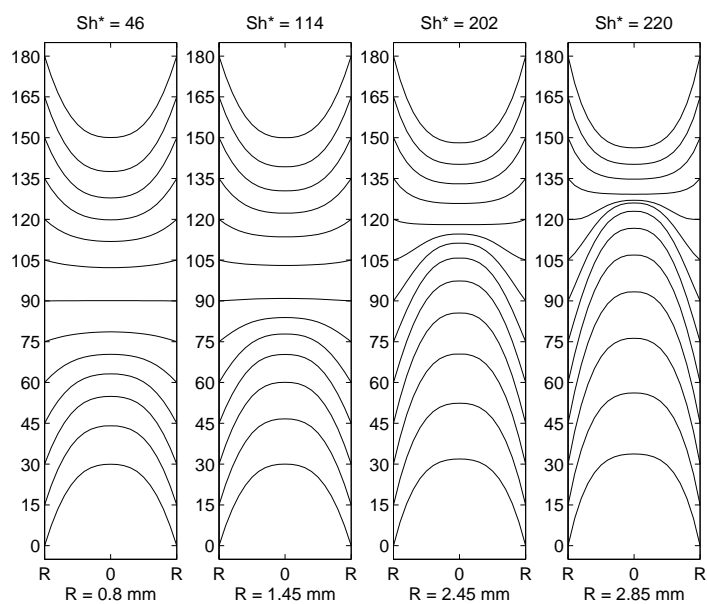
$$p(b) = u(r) \quad (5.80)$$

$$q(b) = 0 \quad (5.81)$$

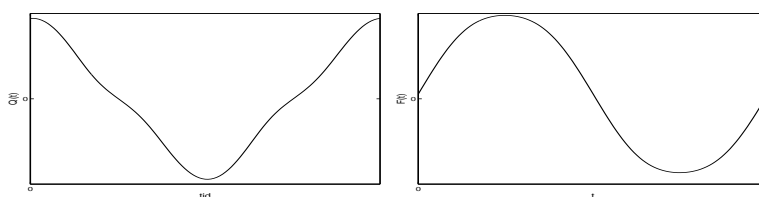
Vi vil ikke gå dybere ind i Matlab-programmets virkemåde, men blot henvide til (Higham & Higham; 2000, s. 459+). Vores egne programkoder kan ses i appendix A.2.

Figur 5.5 viser et kvalitativt plot af hastighedsprofilerne for fire forskellige rørtykkelser. Det er ikke til at se på figuren, at der er tale om en ikke-newtonsk strømning. I eksemplet er det viskositeten for modelvæsken der er anvendt. De øvrige parametre er tilpasset således at den maksimale shearrate ligger i det ulineære område.

I figur 5.6 ses flowet $Q(t)$ og nettoflowet $F(t)$. Det fremgår af figuren at de ikke-lineære effekter er tydeligere i $Q(t)$ end i $F(t)$.



Figur 5.5 Kvalitativt plot af teoretiske hastighedsprofiler for et generaliseret newtonsk væskeflow igennem et rør med en trykgradient på $-A \cos \omega t$ og fire forskellige rørtykkelser. Profilerne er plottet i step af $\Delta \omega t = 15^\circ$. For $\omega t > 180^\circ$ er hastighedsprofilerne det samme som for $180^\circ < \omega < 0^\circ$.



Figur 5.6 Til venstre ses et kvalitativt plot af flowet for et generaliseret newtonsk væske. Til højre ses nettoflowet.

6 Blod og modelvæske

I dette kapitel vil vi beskrive blodvæsken samt den arteriegeometri den strømmer i. Dernæst vil vi redegøre for vores valg af modelvæske til at repræsentere blod i vores eksperimenter. Dette indbefatter bl.a. egne rheometermålinger af både blod og modelvæske.

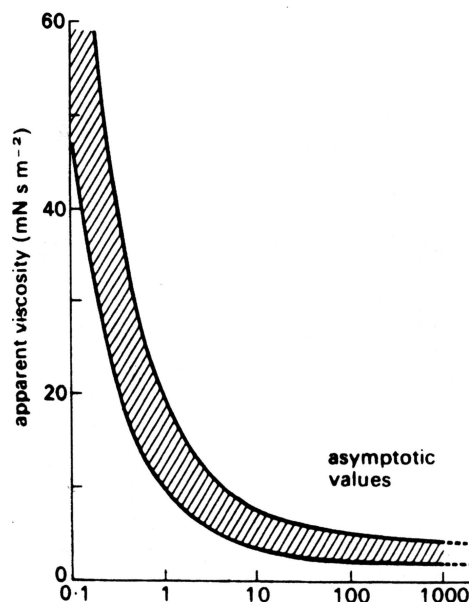
6.1 Blodvæsken

Olufsen (1998), Fung (1990), Pedley (1980), Whitmore (1968)

Blodet har til formål at forsyne vores organer og væv med ilt og fjerne kuldioxid igen. Blod består af røde blodlegemer, hvide blodlegemer og blodplader opløst i plasma. De hvide blodlegemer er en del af vores immunforsvar og blodpladerne er afgørende for blodets evne til at koagulere. Tilsammen udgør de hvide blodlegemer og blodpladerne kun 1% af blodet. De røde blodlegemer transporterer ilt og kuldioxid. De udgør ca. 40–45% (også kaldet hematokritværdien) af blodet i de store arterier. Da deres volumenandel af blodet er så stor i forhold til blodpladerne og de hvide blodlegemer, er det dem der totalt dominerer blodets flydeegenskaber.

De røde blodlegemer er fleksible biconkave disk-formede celler med en diameter på ca. $8 \mu\text{m}$ og ca. 5×10^6 celler pr. mm^3 . Blod kan betragtes som en homogen væske så længe blodårenes diameter ikke er sammenlignelig med de røde blodlegemers diameter. I blodårer med en diameter på over $100 \mu\text{m}$ opfører blod sig således som en homogen væske. Blods har en densitet på $1,05 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$ (Pedley; 1980, s. 31).

Blodplasmaen er i sig selv en newtonsk væske, men ved opløsningen af de forskellige blodpartikler, bliver blodet som helhed en ikke-newtonsk væske, hvis viskositet afhænger af shearraten. I figur 6.1 er viskositeten afbilledet som funktion af shearraten. Det ses at blods ikke-newtonske opførsel for alvor sætter ind for shearrater



Figur 6.1 Blods viskositet som funktion af shearrate. Caro et al. (1978)

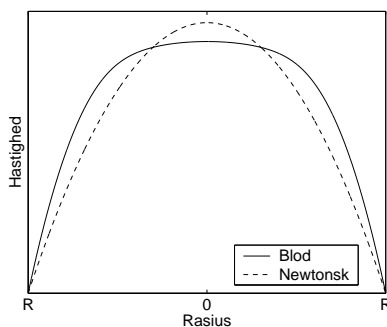
mindre end 10 s^{-1} . For shearrater større end ca. 300 s^{-1} bliver de ikke-newtonske egenskaber negligerbare. Her er viskositeten på et niveau i størrelsesordenen $4 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (fire gange mere viskøst end vand). På figuren fremgår det også at blod er en blød væske, idet viskositeten aftager for voksende shearrate.

6.1.1 Arteriegeometri og vores forsimpning

Størrelsen på menneskets arterier varierer fra de store arterier med en diameter på op til ca. $2,5 \text{ cm}$ og ned til kapillærniveau hvor diameteren er i størrelsesordenen μm . Arterievæggene består af glat muskulatur og elastiske fibre, og blodåren er således i stand til at udvide sig når hjertets slag forårsager en pulsølge ned igennem åren. Vi vil ikke beskrive dette fænomen, da vi i dette projekt har valgt kun at betragte stive rør. Vi har også begrænset os til de store blodårer, så vi dermed kan betragte blodet som en homogen væske.

I de store blodårer bevæger blodet sig med mere end $0,1 \text{ m/sek}$. Shearraterne spænder fra 0 s^{-1} i midten af blodåren og op til små 200 s^{-1} ved randen. Den gennemsnitlige shearrate er omkring $100\text{--}200 \text{ s}^{-1}$. Viskositeten ved disse shearrater er ca. 10% højere end

den asymptotiske værdi, se figur 6.1. Det betragtes mange steder i litteraturen (jf. afsnit 2.2) som en god approksimation at blod er en newtonsk væske, når det flyder i de store arterier. Begrundelsen er, at det er en relativ lille del af væskeflowet der opfører sig ikke-newtonsk, nemlig den midterste del af flowet hvor shearaterne er meget små.



Figur 6.2 Hastighedsprofil af hhv. en newtonsk væske og af blod, hvor sidstnævntes profil har en mere fladtrykt karakter.

I dette projekt har vi valgt at betragte et væskeflow igennem et lige stift rør. Hvis væsken er newtonsk og strømmingen stationær vil hastighedsprofilen være en paraboloid (jf. ligning 5.15), men da blod er en blød væske er det ikke tilfældet. Blods hastighedsprofil vil pga. viskositeten have en mere fladtrykt karakter, se figur 6.2.

6.2 Valg af modelvæske

Grunden til at vi overhovedet ønsker en modelvæske er, at blod kan være relativt kompliceret at arbejde med. For det første er det svært at skaffe i store mængder og for det andet har det den egenskab, at det koagulerer når det kommer i forbindelse med luften eller hvis det står stille.

Modelvæsken behøver ikke at ligne blodet i alle henseender (f.eks. er modelvæsken gennemsigtig) men det er vigtigt at den har de samme viskøse egenskaber. Det er også et krav at den er forholdsvis billig at fremstille, da vi skal bruge ikke ubetydelige mængder.

I artiklen Brookshier & Tarbell (1993) argumenteres der for at en glycerinopløsning iblandet xanthangummi er en god modelvæske for blod. Vandige opløsninger af xanthangummi er siden blevet en

almindelig anvendt modelvæske for blod (jf. f.eks. F J H Gijzen & Janssen (1999b)).

I Brookshier & Tarbell (1993) er forskellige hematokritværdier (se afsnit 6.3) for blod¹ modelleret. Det drejer sig om hhv. 20, 46 og 79% (ved 25°C). Da menneskeblods hematokritværdi ligger omkring de 45%, er det væsken med 46% vi har valgt at bruge. Den består af en 40% glycerinopløsning, som vi har fremstillet ved at blande 40% glycerol ($C_3H_8O_3$) og 60% vand², tilsat 0,5 vægtprocent salt ($NaCl$) og 0,04 vægtprocent xanthangummi. Sidstnævnte har vi købt hos Fluka; produktnr. 95465; CAS nr. 11138662.

Glycerols funktion er at hæve viskositeten af vandet. Dette gør den ens for alle shearrates og en glycerinopløsning er altså en newtonsk væske. Jo større glycerolindhold des større viskositet. Xanthangummi funktion er at gøre væsken blød. Xanthangummi vil også hæve værdien af η_∞ -niveauet, men altså hovedsagligt have en indvirkning på viskositeten ved de lavere shearrates. For at gøre xanthangummi lettere opløselig i væsken er der tilsat salt.

I Brookshier & Tarbell (1993)'s eksperimenter er det viskøse og elastiske komponent af den komplekse viskositet målt for et pulserende flow med en frekvens på 2 Hz, og et shearrate-span på 1 – 1000 s⁻¹. Værdierne for både det viskøse og elastiske element for hhv. blod og modelvæske stemmer pænt overens, og det er bl.a. på denne baggrund at der konkluderes at glycerin/xanthangummi-opløsningen er en god modelvæske for blod.

6.3 Måling med rheometer

Hvidt (1998), *Bohlin VOR Software User Manual* (1989)

Vi har altså valgt at bruge en blanding af glycerol, vand, salt og xanthangummi som modelvæske for blod. For at sikre os at både blod og modelvæske har samme bløde viskøse opførsel har vi målt deres viskositeter som funktion af shearraten. Dette har vi gjort på et Bohlin VOR rheometer.

Rheometeret måler indirekte shearstress og shearstrain eller she-

1 I artiklen er det faktisk svineblod der er benyttet, men de samme forfattere har gjort rede for at svineblod har den samme komplekse viskositet som menneskeblod.

2 Vi har benyttet ionbyttet vand, så vores måleapparaterne ikke kalker til.

arrate hvorudfra forskellige rheologiske størrelser, herunder viskositeten, så kan beregnes. På rheometeret kan monteres forskellige deformationsgeometrier. Til væsker benytter man sig ofte af en såkaldt couette-geometri. Den består af to koaksiale cylindere. Mellemrummet mellem de to cylindere, hvori væsken placeres, er småt således at flowet imellem dem tilnærmelsesvis kan betragtes som et flow imellem to parallelle plader. Når den ene plade bevæger sig med konstant hastighed opstår et såkaldt simpelt shearflow svarende til det i figur 3.3 viste.

Ved viskositetsmålinger sætter rheometeret den yderste cylinder til at rotere med konstant hastighed. Den inderste cylinder fastholdes. Rheometeret registrerer foruden vinkelhastigheden Ω også drejningsmomentet T hvormed der bliver vredet i den inderste cylinder. Hvis a og b står for den lille og store cylinders radius og L for deres længde vil viskositeten være givet ved (Feynman; 1964, s. 41-3)

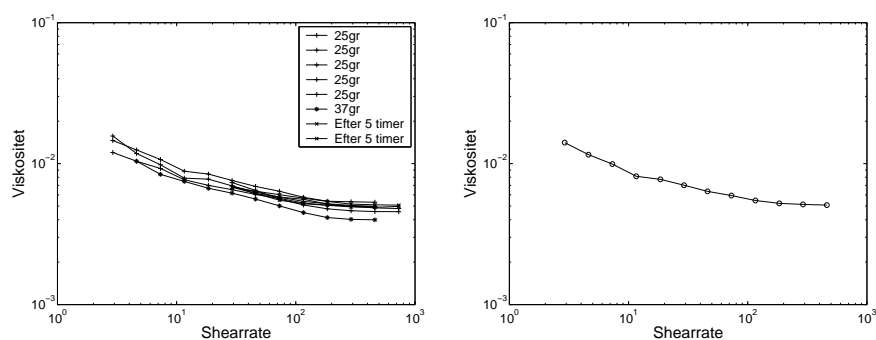
$$\eta = \frac{T(b^2 - a^2)}{4\pi L a^2 b^2 \Omega} \quad (6.1)$$

som rheometeret sammen med den pågældende shearrate beregner for os.

6.4 Data for blod

Vi har målt viskositeten af Stines blod. For at blodet ikke skulle koagulere ved kontakten med luft tilsatte vi antikoagulationsmidlet heparin.

I figur 6.3 er blodmålingerne plottet i et dobbeltlogaritmisk papir. Vi har målt ialt otte gange og måleserierne ligger pænt tæt. Det ses tydeligt at blod er en blød væske. Alle målinger er foretaget ved $25^\circ C$ undtagen en enkelt som er foretaget ved $37^\circ C$, som er blodets temperatur inde i kroppen. Måleserien for denne temperatur ligger lavest, men er ikke markant lavere end de andre serier. Den udviser samme bløde opførsel som de andre og derfor har vi valgt at arbejde ved cirka $25^\circ C$ i vores forsøg. To af måleserierne er foretaget efter at blodet har stået fem timer efter tapning og her ses ingen forskel i forhold til de øvrige målinger.

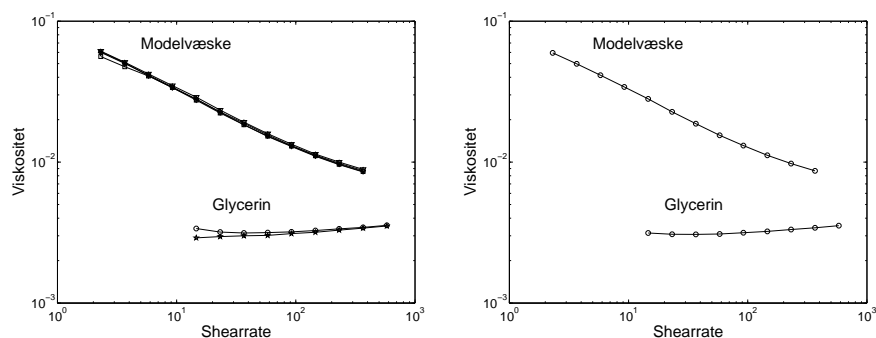


Figur 6.3 Til venstre ses Stines blods viskositet som funktion af shearraten; målt ialt otte gange. Til højre ses gennemsnittet af de otte målinger.

Vi prøvede desuden at måle det komplekse shearmodul G^* , for at få information om væskens elasticitet. Desværre var rheometeret ikke følsomt nok og vi observerede kun støj.

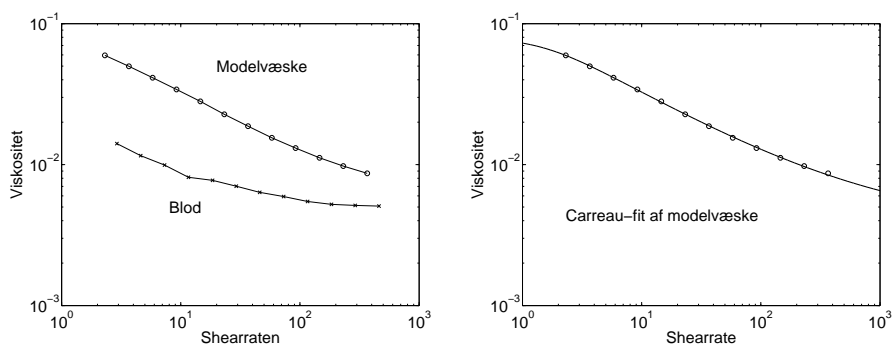
6.5 Data for modelvæsken

Blandingen af modelvæsken tog tid at lære. Xanthangummi er ikke nemt at opløse og har en tendens til at klumpe. Vi fandt frem til at det fungerede bedst hvis vi forsigtigt dryssede xanthangummi'en i den øvrige blanding. Herefter satte vi blandingen til at blive magnetomrørt natten over.



Figur 6.4 Til venstre ses to måleserier for hhv. modelvæskens og glycerinoløsningens viskositet som funktion af shearraten. Til højre ses gennemsnittet for hver af målsierierne.

I figur 6.4 ses to måleserier af modelvæskens viskositet og af viskositeten for glycerinopløsningen uden xanthangummi. Modelvæsken er også tydeligt en blød væske og glycerinopløsningen har en konstant viskositet og er dermed en newtonsk væske. Den højre graf i figuren viser gennemsnittet af de to måleserier hver især. Herudfra sættes glycerinopløsningens viskositet til at være $3,5 \times 10^{-3} Pa \cdot s$.



Figur 6.5 Til venstre ses gennemsnittet af blod- og modelvæskemålingerne. Til højre ses modelvæskens Carreau-fit.

Til venstre i figur 6.5 ses gennemsnittet af hhv. blod- og modelvæskemålingerne sammen. Modelvæsken har en højere viskositet, men samme kvalitative opførsel som Stines blod, hvilket er det primære.

Vi vil forsøge at modellere modelvæskens viskositet med Carreau-modellen. Den er i følge ligning 5.64 givet ved

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \left[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (6.2)$$

Fittet af denne funktion til de gennemsnitlige måledata for modelvæsken kan ses til højre i figur 6.5. De tilhørende parameterverdier er givet ved $\eta_0 = 7,96 \times 10^{-2}$, $\eta_{\infty} = 3,62 \times 10^{-3}$, $\lambda = 0,673$ og $n = 0,499$ hvilket giver os følgende udtryk for modelvæskens viskositet

$$\begin{aligned} \frac{\eta - 3,62 \cdot 10^{-3}}{7,96 \cdot 10^{-2}} &= \left[1 + (0,673\dot{\gamma})^2\right]^{\frac{-0,501}{2}} \Rightarrow \\ \eta &= 7,60 \cdot 10^{-2} \left[1 + (0,673\dot{\gamma})^2\right]^{-0,250} + 3,62 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \quad (6.3)$$

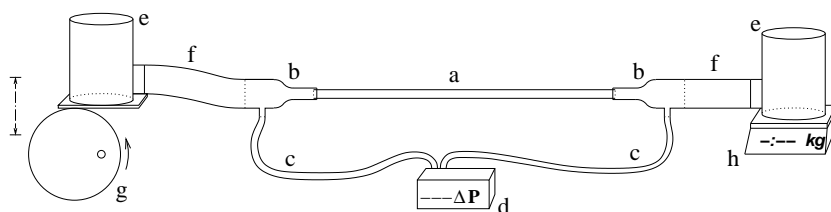
som altså er det teoretiske udtryk vi vil bruge for viskositeten i kapitel 5. Her får vi også brug for modelvæskens densitet. Den beregner vi ud fra vand og glycerols densiteter, da vi pga. det relative lille indhold af xanthangummi og salt (0,54% ialt) ser bort fra deres bidrag. Således får både den newtonske (uden xanthangummi) og den ikke-newtonske modelvæske (med xanthangummi) samme densitet. Vand har en densitet på $998,2 \text{ kg/m}^3$ og glycerol en på 1261 kg/m^3 , hvilket giver vores modelvæske (40% glycerinopløsning) en densitet på 1116 kg/m^3 .

7 Eksperiment

For at afgøre om hvorvidt vores matematiske model af rørstrømmene i kapitel 5 beskriver vores forsimplede virkelighed, har vi udført en række eksperimenter. Vi har selv konstrueret en forsøgsopstilling, som i hovedtræk består af et stift lige rør, som væsken kan strømme igennem. Ved at styre trykforskellen mellem rørets endepunkter, vil der genereres en væskestrøm gennem røret, som vi kan måle. Væskestrømningen afhænger af væskens fysiske egenskaber (viskositet og densitet), af rørets geometri (længde og radius), samt af trykforskellen mellem rørets ender. Det er vores hensigt at måle væskestrømningen af glycerin- og xanthangummiopløsningen ved et oscillerende trykinput.

7.1 Måleapparat

I dette afsnit vil vi forklare udformningen og dimensioneringen af vores apparat, og gøre rede for hvordan det bruges eksperimentelt.



Figur 7.1 Måleapparatet består af et glasrør (a), glasstuds (b), slange til tryksensor (c), tryksensor (d), kar (e), tyk siliconeslange (f), roterende hjul (g) og elektronisk vægt (h).

Måleapparatet er opbygget som vist på figur (7.1). Det består af to kar (e). Det ene, oscillationskarret, er placeret på et asymmetrisk roterende hjul ¹ (g) og det andet, vægtskarret, på en elektronisk

¹ Med asymmetrisk menes at der ikke roteres omkring hjulets centrum.

vægt (h). Fra hver af karrene går en tyk bevægelig siliconeslange (f) som er forbundet med en studs (b). Studsen, som er lavet af glas, forbinder den tykke siliconeslange med glasrøret (a). På studsene er der også en åbning i siden, der via en stiv slange er forbundet med tryksensoren (d).

7.1.1 Apparatets funktion

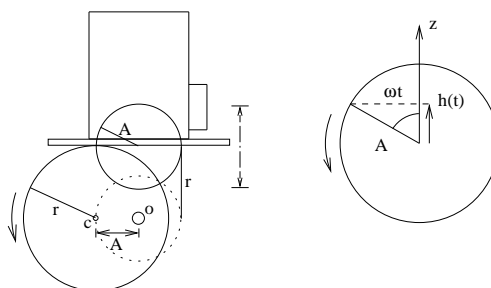
Trykforskellen Δp mellem rørets to ender er forårsaget af højdeforskellen Δh mellem væskeoverfladerne i de to kar.

$$\Delta p = \rho g \Delta h \quad (7.1)$$

hvor ρ er densiteten og g tyngdeaccelerationen. Når hjulet roterer asymmetrisk under det ene kar, vil det få karret til at bevæge sig op og ned i en sinusoidal bevægelse. Amplituden A vil svare til afstanden mellem hjulets centrum og rotationsaksen (se figur 7.2). Karrets højde som funktion af tiden vil derfor være givet ved

$$h(t) = A \cos(\omega t) \quad (7.2)$$

hvor A er amplituden og ω vinkelfrekvensen.



Figur 7.2 Det oscillerende kar forårsager et oscillerende tryk. Hjulets centrum c roterer jævnt med radius A omkring omdrejningspunktet O . Karrets højde er derfor givet ved projektionen af cirkelbevægelsen ind på z -aksen altså $h(t) = A \cos(\omega t)$.

Hjulet roterer vha. af en motor. Vi kan styre rotationshastigheden og afstanden mellem centrum og omdrejningspunktet og derved hhv. vinkelfrekvensen ω og højdeamplituden A . Selv om vi kender den præcise højdeforskel de to kar imellem, vil amplituden på

trykket ikke være kendt, da vandstanden i karrene ændrer sig da der strømmer væske frem og tilbage gennem røret. Derudover vil de tykke slanger måske også betyde noget for trykforskellen mellem selve rørstudsene. Derfor har vi valgt at montere en elektronisk tryksensor, som måler trykforskellen mellem glasrørets ender. Tryksensoren gør også at vi kan opsamle vores trykinputdata elektronisk.

Der sidder også en sensor ved det roterende hjul, som registrerer hver gang det passerer sensoren. Derved får vi målt perioden hurtigt og præcist. Det er nødvendigt, da hjulets rotationshastighed styres af spænding over motoren som vi styrer manuelt.

Tryksensoren er en lille elektronisk device opdelt i to rum. Rummene er adskilt med en elektrisk ledende membran, og der skal tilsluttes en slange til hvert. Trykforskellen i rummene vil deformere membranen, og dens elektriske modstand ændres. Man kan således måle hvor stor trykforskellen er ved at måle modstanden i membranen. Den er med andre ord en transducer, der omformer et mekanisk signal til et elektrisk signal.

Slangerne der forbinder tryksensoren med rørenderne, skal være relativt hårde og fulde af væske, da det er vigtigt, at trykket i sensoren ændres instantant i forhold til rørstudsene. Grunden til at slangerne skal være fulde af væske er, at der ikke må løbe en strøm i dem, da det vil forårsage forsinkelse. At slangerne er hårde gør at der ikke ophobes væske i dem.

Karrene er forbundet med en tyk slange, hvis diameter er mere end ti gange så stor som glasrørets. Dette er for at minimere dens indflydelse på væskeflowet (som er proportionalt med radius i fjerde, se ligning 5.16). De tykke slanger kan således sammen med karrene betragtes som hhv. et tilløbs- og udløbsresovir.

7.2 Dimensionering

Vi ønsker at dimensionere vores apparat således, at flowet består af de shearrater hvor ulineariteten i viskositeten optræder. Blod (og dermed også modelvæskens) viskositets ulineære opførsel foregår hovedsagligt for shearrater mindre end 300 s^{-1} (jf. afsnit 6.1). Apparatet skal således dimensioneres efter dette.

Vi har derfor brug for et udtryk for den maksimale shearrate $\dot{\gamma}_{max}$

der optræder i røret. Til dette betragter vi en stationær newtonsk strømning. Selv om vores modelvæske ikke er en newtonsk væske, er det rimeligt at betragte den som sådan lige nu, da vi i dimensioneringen af vores apparat tager udgangspunkt i en størrelsesorden på de enkelte dele af vores apparat. Vi betragter en stationær strømning svarende til den maksimale trykgradient i det oscillerende tilfælde, da det er her de største shearrater findes.

Vi betragter derfor nu det statiske newtonske Poiseuille hastighedsfelt $u_z(r)$ som er ifølge ligning 5.15 er givet ved

$$u_z(r) = -\frac{dp}{dz} \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (7.3)$$

Shearraten er givet ved det differentierede hastighedsfelt som er

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{du_z(r)}{dr} \\ &= \frac{dp}{dz} \frac{r}{2\mu} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Hvis man betragter afbildningen af Poiseuille feltet (se figur 5.1) ses, at den maksimale shearrate må være den numeriske størrelse af det differentierede hastighedsfelt ved rørranden, altså for $r = R$. Derfor er

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{max} &= |\dot{\gamma}|_{r=R} \\ &= \frac{dp}{dz} \frac{R}{2\mu} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Størrelsen på trykgradienten er givet ved trykforskellen $\Delta p = \rho g \Delta h$ mellem rørets ender divideret med rørets længde L , altså

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\rho g \Delta h}{L} \quad (7.6)$$

hvilket ved indsættelse i ligning 7.5 giver den maksimale shearrate

$$\dot{\gamma}_{max} = \frac{\rho g \Delta h R}{2\mu L} \quad (7.7)$$

Vi ønsker som sagt at den maksimale shearrate i vores flow skal være ca. 300 s^{-1} og betragter derfor uligheden

$$300 \text{ s}^{-1} > \frac{\rho g \Delta h R}{2\mu L} \quad (7.8)$$

hvor størrelserne Δh , R og L skal vælges så uligheden er sand samtidig med at apparatet er fysisk muligt at konstruere. ρ for modelvæsken er 1116 kg/m^3 (jf. afsnit 6.5) og som μ bruger vi værdien af $\eta_{\infty} = 3,62 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, da det er den laveste viskositetsværdi og derfor vil gøre højresiden i uligheden størst mulig.

Δh valgte vi til maksimalt at kunne være 4 cm (brugte også 1 og 2 cm , og en enkelt måling på 5 cm), da motoren der driver det roterende hjul havde en begrænset ydeevne. Længden L på røret satte vi til $1,0 \text{ m}$ da det ville være for skrøbeligt at håndtere et tyndt glastrør der var meget længere. Det giver os ved indsættelse i ulighed 7.8, at glastrøret skal have en radius $R < 4,9 \text{ mm}$. På instituttets glasværksted fandtes bl.a. glastrør med radierne $1,45 \text{ mm}$ og $2,85 \text{ mm}$, som vi valgte at bruge.

7.3 Dataopsamling

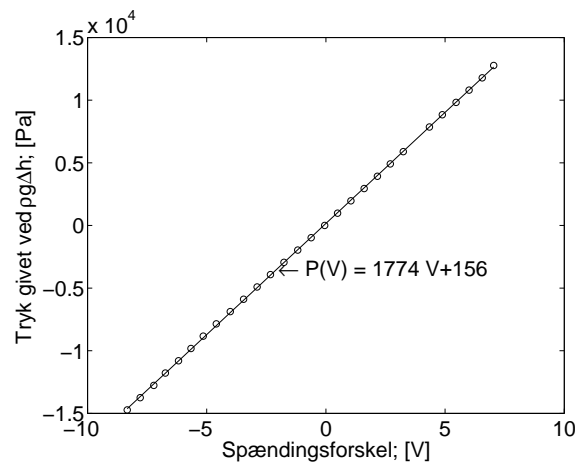
Dataopsamlingen foretages af en computer. Tryksensoren, vægten og periodesensoren er tilsluttet computeren. Selve opsamlingen foregår ved, at vi fastsætter et antal målinger og et tidsinterval mellem målingerne. Oscillationsamplitude og -frekvens indstilles og apparatet får lov til at stå og køre et stykke tid, indtil det var kommet i periodisk ligevægt og transientledet (jf. afsnit 10.5) således er uden betydning. Computeren opsamler så tre datatyper for hver måling: Spændingen over tryksensoren, vægten og tiden. Vi ender altså med at have en tabel, der har tre søjler og samme antal rækker som antal målinger.

Vægten er langsom til at afsende data, den skal bruge mindst et halvt sekund. Det betyder, at ved en frekvens på $0,1 \text{ Hz}$, kan vi kun måle 20 gange pr. periode. Derfor har vi målt over flere perioder.

7.4 Tryksensorens nulpunkt

Tryksensorens nulpunkt svinger mellem ca. $-0,15\text{ V}$ og $+0,25\text{ V}$, svarende til en højdeforskel mellem karrene på 7 cm . Dette udsving optræder dog over længere tid og indenfor hver måleserie er nulpunktet stabilt.

Trykmåleren måler som sagt ikke trykket direkte, men en spændingsforskel. Hvis vi ønsker at kende trykket i Pascal, må vi undersøge, hvordan trykket afhænger af spændingsforskellen. Vi har lavet et forsøg, hvor vi påsatte to slanger på trykmåleren. Så holdt vi de to vandsøjlers overflader på forskellige niveauer med 10 cm 's interval og registrerede den tilhørende spændingsforskel. Differensen Δh mellem de to overflader gik fra $-1,5$ til $1,5\text{ m}$; negativ når overfladen fra plus-indgangen var $1,5\text{ m}$ under den fra minus-indgangen, og positiv ved den omvendte position.



Figur 7.3 Trykket ($\rho g \Delta h$) som funktion af de målte spændingsforskelle.

Ved at afbillede $P = \rho g \Delta h$ som funktion af den målte spænding, fås grafen vist i figur 7.3. Den bedste rette linie mellem måledata er

$$P = 1774 \cdot V + 156 \quad (7.9)$$

hvor P er trykket målt i pascal og V spændingsforskellen målt i volt. Det ses at funktionen ikke går gennem $(0,0)$ men $(0,156)$. Trykmåleren viser altså ikke en 0-spænding ved et tryk på 0 pascal.

Det har dog ingen betydning for vores oscillerende målinger. Vi midler trykket over en periode og trækker det fra de målte værdier, så bliver data symmetriske om 0.

8 Måledata

I dette kapitel vil vi præsentere vores måledata foretaget på glycerin- og xanthangummi-opløsningen. Vi lægger ud med at forklare, hvordan vi opsamler og bearbejder rådata. Dernæst gør vi rede for hvordan vi finder de teoretiske data. Til sidst præsenterer vi de målte og teoretiske data.

8.1 Rådata

Vi opsamler data for de forskellige måleserier. En måleserie er karakteriseret ved samme væske, rørgeometri og apparatindstilling. Som beskrevet i afsnit 7.2 valgte vi at eksperimentere med to forskellige rørtykkelser ($1,45\text{ mm}$ og $2,85\text{ mm}$) og to rørlængder ($0,5\text{ m}$ og $1,0\text{ m}$). Forsøgsapparatet blev indstillet så vi oscillerede med en amplitude på hhv. 1, 2, 4 og 5 cm og en frekvens på 0,1, 0,2 og 0,4 Hz . Der er ialt blevet lavet otte måleserier for glycerin og fem for xanthangummi.

Vi forsøgte at indsamle flere måledata for xanthangummi, men flowet i de ikke her præsenterede måleserier var desværre så småt, at vægtens usikkerhed blev større end variationen i vægtudsvinget. Af samme årsag har vi kun xanthangummi-målinger foretaget i det tykke korte rør, da flowet her er størst. Årsagen til dette problem er at vi i dimensioneringen af apparatet (jf. afsnit 7.2) kun har taget hensyn til at flowet skulle indeholde de relevante lave shearrater og ikke selve størrelsen af flowet.

Tabel (8.1) viser en oversigt over apparatindstillingerne for de 13 måleserier. Første kolonne angiver et nummer for hver måleserie, som er det der vil blive refereret til i figurerne. Anden kolonne angiver væsketypen, tredje kolonne rørtykkelsen, fjerde kolonne rørlængden, femte kolonne frekvensen og sjette kolonne angiver højdeamplituden i oscillationen.

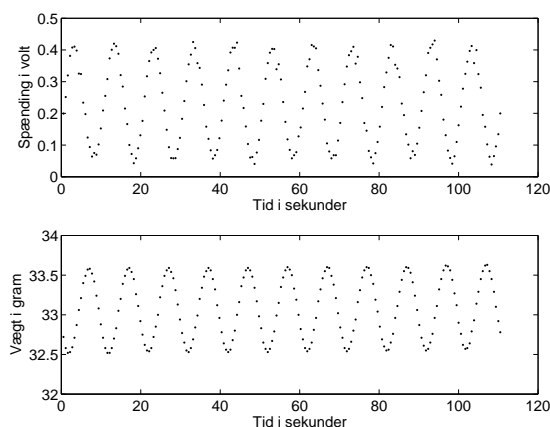
Måleserie	Væske	R /[mm]	L /[m]	ν /[Hz]	Højde /[cm]
1	Glycerin	1,45	0,5	0,2	1
2	Glycerin	1,45	0,5	0,2	4
3	Glycerin	1,45	1,0	0,1	4
4	Glycerin	2,85	0,5	0,1	4
5	Glycerin	2,85	0,5	0,2	1
6	Glycerin	2,85	0,5	0,2	4
7	Glycerin	2,85	1,0	0,1	1
8	Glycerin	2,85	1,0	0,1	4
9	Xanthangummi	2,85	0,5	0,1	1
10	Xanthangummi	2,85	0,5	0,1	4
11	Xanthangummi	2,85	0,5	0,2	2
12	Xanthangummi	2,85	0,5	0,2	4
13	Xanthangummi	2,85	0,5	0,4	5

Tablet 8.1 Apparatindstillingerne for de 13 måleserier.

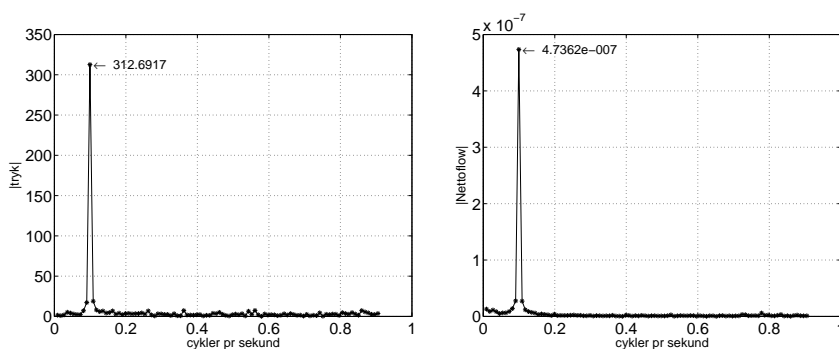
For hver måleserie, blev der opsamlet data i en matrix med tre søjler, svarende til tid, tryk og vægt. Trykket blev målt i volt, men omregnet til Pascal som angivet i afsnit 7.4. Ligeledes blev vægtens udslag omregnet til et volumen, ved at dividere med væskens densitet. Vi vil dog fortsat referere til den som en vægtmåling. Et eksempel på hvordan rådata tager sig ud uden bearbejdning, er vist på figur (8.1).

For at analysere vores målinger Fourier-opløser vi tryk- og vægt-data. For hver måleserie får vi således et sæt af komplekse Fourierkoefficienter, en for hver tone. Den nulte tone sorterer vi fra, da vi kun er interesserede i det periodiske forløb. Figur (8.2) viser et eksempel på afbildning af normen af koefficienterne som funktion af frekvensen. Peaken er amplituden til grundtonen, og det er den vi tager udgangspunkt i når vi analyserer data.

Ved at dividere koefficienterne for vægten med trykket, får vi forholdet mellem output og input, og argumentet til disse tal angiver fasevinklen. I appendix B er normen til Fourierkoefficienterne for samtlige målinger afbildet.



Figur 8.1 Ubearbejdede rådata for måleserie 3 (se tabel 8.1). Øverst vises trykket i form af den målte spænding og nederst vægten i gram.

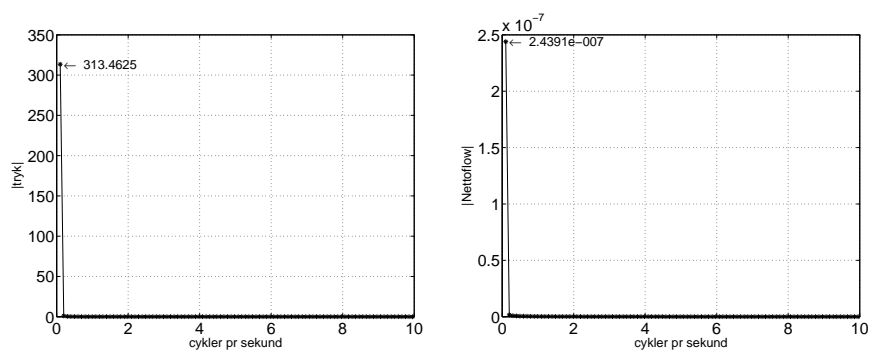


Figur 8.2 Måleserie 3: Normen af Fourier-koefficienterne som funktion af frekvensen for tryk- og vægtmåling.

8.2 Teoretiske data

Vi har lavet to programmer i Matlab, et for det newtonske og et for det ikke-newtonske tilfælde. For hver måleserie bruger vi disse programmer til at simulere et teoretisk output. Vi bruger trykket fra måleserien som input, hvorefter programmet genererer et vægt-output. Det giver os mulighed for at sammenligne målingerne med teorien. Outputtet fra programmerne bliver behandlet på samme måde som målingerne. Eksempelvis viser figur 8.3 de teoretiske værdier for målingen i figur 8.2. Alle de fundne teoretiske værdier, er listet i tabel 8.2 på side 77.

I tabel 8.2 har vi også udregnet Womersley-tallet og den maksimale



Figur 8.3 Måleserie 3: Den teoretiske norm af Fourier-koefficienterne som funktion af frekvensen.

shearrate for de forskellige måleserier. Womersley-tallet er ikke defineret for en ikke-newtonsk strømning, hvilket forklarer at felterne her er tomme. Disse tal er alle teoretisk baserede, da vi jo ikke har målt hastighedsprofilerne, og skal derfor ses som en størrelsesorden. Shearraten finder modellen i afsnit 5.5 frem til, ved at tage den maksimale shearrate ved randen af røret, over en hel periode af flowet.

Parameterindstillinger					Eksperimentelle data					Teoretiske data				
Måle- serie	væske- type	R /[mm]	L /[m]	ν /[Hz]	$ FA_P $ /[Pa]	$ FA_V $ / $10^{-6}[m^3]$	$ FA_V / FA_P $ / 10^{-9}	ϕ /[rad]	FA_V/FA_P / 10^{-9}	$ T FA_P $ /[Pa]	$ T FA_V $ / $10^{-6}[m^3]$	T ϕ /[rad]	$\dot{\gamma}_{max}$ / s^{-1}	α
1	glyc.	1,45	0,5	0,2	57	0,06	1,1	-5,1	0.4+1.1i	57	0,02	-1,7	10	0,9
2	glyc.	1,45	0,5	0,2	283	0,32	1,1	-4,3	-0.4+1.1i	284	0,11	-1,7	52	0,9
3	glyc.	1,45	1	0,1	313	0,47	1,5	-2,3	-1-1.1i	313	0,24	-1,6	57	0,6
4	glyc.	2,85	0,5	0,1	290	9,82	33,9	-2,2	-19.3-27.9i	291	3,32	-1,8	102	1,3
5	glyc.	2,85	0,5	0,2	56	0,83	14,7	-4,9	2.1+14.6i	56	0,28	-2,1	18	1,8
6	glyc.	2,85	0,5	0,2	277	3,88	14	-4,1	-8.4+11.2i	278	1,39	-2,1	88	1,8
7	glyc.	2,85	1	0,1	54	1,1	20,4	-2,6	-17.7-10.1i	54	0,62	-1,8	19	1,3
8	glyc.	2,85	1	0,1	318	6	18,8	-2,3	-12.1-14.4i	319	3,59	-1,8	111	1,3
9	xant.	2,85	0,5	0,1	52	0,4	7,7	-3,4	-7.5+1.7i	52	0,03	-1,6	1	
10	xant.	2,85	0,5	0,1	266	3,66	13,8	-3,4	-13.4+3.3i	267	0,29	-1,6	13	
11	xant.	2,85	0,5	0,2	126	0,62	4,9	-6,1	4.8+1.1i	126	0,04	-1,6	3	
12	xant.	2,85	0,5	0,2	277	1,69	6,1	-6	5.9+1.4i	279	0,15	-1,6	14	
13	xant.	2,85	0,5	0,41	340	0,82	2,4	-4,4	-0.8+2.3i	341	0,1	-1,7	19	

Tabel 8.2 Vores måledata i form af de 13 måleserier. F står for Fourier-koefficient og T for teoretisk værdi. A_P er trykamplituden, A_V er nettoflow-amplituden, ϕ er fasevinklen, $\dot{\gamma}_{max}$ er den maksimale shearrate og α er Womersley-tallet (er ikke defineret for det ikke-newtonske tilfælde). $\dot{\gamma}_{max}$ og α er beregnet teoretisk.

9 Analyse

Indledningsvis vil vi gerne slå fast, at på baggrund af store afvigelser mellem måledata og teori, er vi ikke i stand til at konkludere noget endeligt om modelvæsken. Vi vil dog forsøge at trække de informationer ud der måtte være i målingerne, og derudover komme med mulige begrundelser for uoverensstemmelserne i kapitel 10.

Alle data der bliver behandlet i dette afsnit kan ses i tabel 8.2 på side 77.

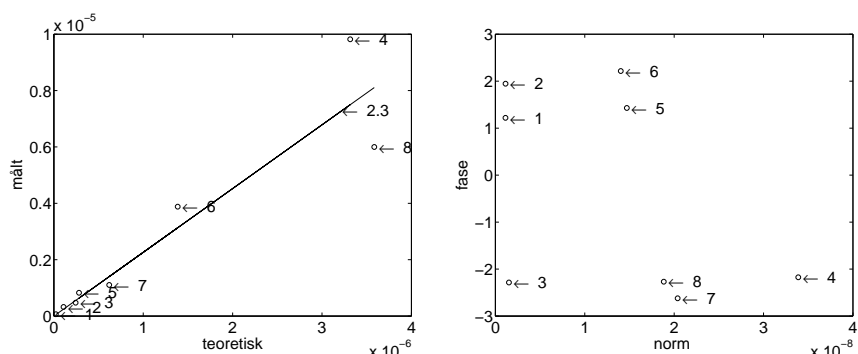
9.1 Glycerin-målinger

Glycerin-målingerne er foretaget med det formål at vurdere apparatets anvendelighed, dvs. i hvilken grad det måler i overensstemmelse med teorien. Med henblik herpå vil vi vurdere amplituden og fasevinklen mellem in- og output, samt lineariteten mellem måleserierne, dvs. om outputtet er proportionalt med inputtet.

Amplituden For samtlige målinger kan vi se, at flowet er alt for stort. For glycerinmålingerne er vægtamplituden i størrelsesorden dobbelt så stor som den burde være. Det ses af figur 9.1 til venstre, hvor den målte vægt er afbildet i forhold til den teoretiske vægt.

Fasen Hvis vi ser på fasevinklen, så er der stor forskel imellem måleserierne med en frekvens på hhv. $0,1 \text{ Hz}$ og dem på $0,2 \text{ Hz}$. Ved $0,2 \text{ Hz}$ er afvigelsen fra det teoretiske meget stor og i størrelsesorden π altså en halv periode. Ved $0,1 \text{ Hz}$ er afvigelsen noget mindre, ca. $\pi/4$. Det ses også på figur 9.1 til højre hvordan $0,2 \text{ Hz}$ målingerne grupperer sig over 0 og $0,1 \text{ Hz}$ målingerne ligger under. De burde allesammen ligge lidt under $\pi/2$. Grunden til dette er, at ved lave frekvenser er flowet i fase med trykket jf. ligning 5.55 og nettoflowet derfor $\pi/2$ faseforskudt. Vores frekvenser er relativt lave, så forskydningen bør ikke være meget over $\pi/2$. Det ses også i ta-

bel (8.2), at den teoretiske faseforskydning for alle målinger, ligger mellem 1,6 og 2,1 (lidt mere end $\pi/2$).



Figur 9.1 Glycerin-opløsningen. Til venstre ses amplituden på den målte vægt som funktion af amplituden for den teoretiske vægt. Til højre ses et faseplot, hvor fasevinklen er plottet som funktion af normen af output/input-forholdet.

Linearitet For en newtonsk væskestrømning er outputtet proportionalt med inputtet, som vi så i ligning (5.61). Hvis vi betragter outputtet i forhold til inputtet, burde det være det samme for hver måleserie, hvor kun højdeamplituden er forskellig. I tabel (9.2) ses de 3×2 måleserier, hvor en sådan kombination er mulig. Tallene, som er taget fra tabel (8.2), ligger parvis rigtigt pænt.

Den foreløbige konklusion om apparatets anvendelighed må dog

Måling	$ A_V/A_P \times 10^{-9}$
1	1,1
2	1,1
5	14,7
6	14,0
7	20,4
8	18,8

Tabel 9.1 Sammenligning af linearitet mellem in- og output for forskellige typer glycerinmålinger. Tallene er taget fra tabel (8.2).

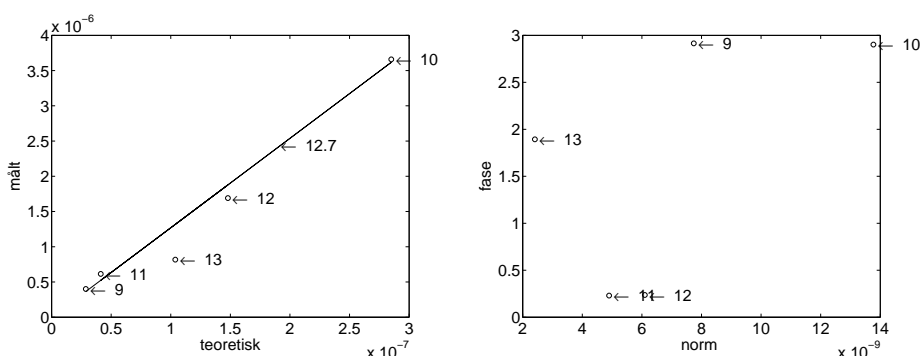
stadig være, at siden måledata ligger så langt fra det forventede, kan det i sin nuværende form ikke anvendes. Inden vi kommer nærmere ind på de mulige forklaringer på disse uoverensstemmelser, vil vi vurdere xanthangummi-målingerne.

9.2 Xanthangummi-målinger

Det var meningen at vi i xanthangummi-målingerne skulle kunne se nogle ikke-newtonske effekter, som vi så skulle bruge til at vurdere vores matematiske model. Dette kan selvsagt ikke lade sig gøre på grund af de store afvigelser apparatet udviser, som langt overskygger eventuelle ikke-newtonske effekter. Vi vil dog kort opsummere afvigelserne ved målingerne.

Amplitude Her er den målte vægtamplitude over fem gange så stor som den teoretisk burde være, jf. figur 9.2 til venstre.

Fasen Hvad fasevinklen angår, så ligger alle målingerne lige over 0, hvor de ligeledes burde ligge lidt under $\pi/2$.



Figur 9.2 Xanthangummi-opløsningen. Til venstre ses amplituden på den målte vægt som funktion af amplituden for den teoretiske vægt. Til højre ses et faseplot, hvor fasevinklen er plottet som funktion af normen af output/input-forholdet.

Linearitet I tabel 9.2 kan vi som før betragte forholdet mellem out- og input. Mellem måling 9 og 10 er der næsten en faktor to til forskel, hvorimod der mellem måling 11 og 12 er en noget mindre afvigelse. På grund af apparatets uanvendelighed, kan disse ulineariteter ikke forklares som ikke-newtonske effekter.

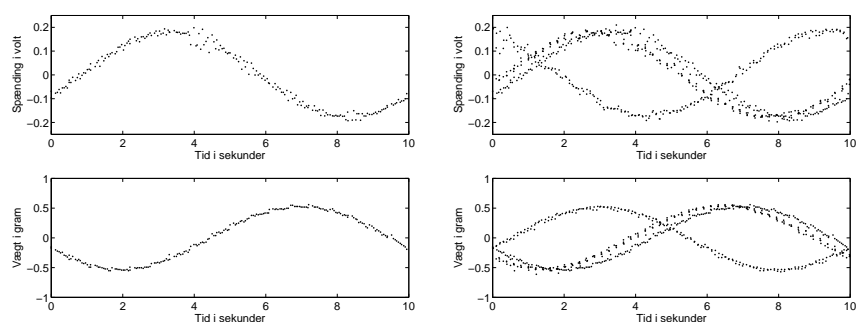
Måling	$ A_V/A_P \times 10^{-9}$
9	7,7
10	13,8
11	4,9
12	6,1

Tabel 9.2 Sammenligning af linearitet mellem in- og output for forskellige typer xanthangummi-målinger. Tallene er taget fra tabel 8.2.

En egentlig analyse, hvor flere overtoner medtages i undersøgelsen, har vi helt udeladt med den begrundelse, at vi ikke har været i stand til at trække nogle fornuftige informationer ud af systemet.

9.3 Reproducerbarhed

Vi har ikke været i stand til at indsamle data hvorpå konklusioner kan blive draget. Men trods dette har vi i vores eksperimenter faktisk målt rimeligt pæne sinusformede kurver for både tryk og vægt. Det kan vi se hvis vi plotter rådata for måleserie 3 modulus perioden, se figur 9.3. I måleserie 3 er perioden 10 s og hver enkelt punkt t i tidsvektoren er altså blevet divideret med perioden og tidsresten $0 \leq t_{rest} < 10s$ er så den t -værdi for hvilket hhv. tryk og vægt er blevet plottet. Vi har også trukket middelværdien fra data.



Figur 9.3 Til venstre er tryk- og vægtrådata for måleserie 3 afbilledet modulus perioden. Til højre ses tre måleserier af samme system og dermed reproducerbarheden.

For mange af vores målinger, har vi foretaget flere måleserier for at undersøge reproducerbarheden af måledata. For måleserie 3 har vi således tre sæt. Hvis vi afbilder de tre sæt modulus perioden kan vi i figur 9.3 til højre se at de følges pænt ad. De tre sæt er ikke i fase, da målingerne er sat igang på et vilkårligt tidspunkt.

Vi er altså i stand til at reproducere vores data, som samtidig i sig selv er pæne kurver. Men problemet er at fasevinklen og amplituden ikke stemmer overens med teorien. Mulige forklaringer på denne uoverensstemmelse vil blive behandlet i det følgende kapitel.

9.4 Det matematiske værktøj

Man kunne stille spørgsmålet, om den numeriske model vi har brugt i kapitel 5.5, er velegnet til at beskrive den oscillerende generaliserede newtonske væskestrømning.

Vi har leget en hel del med den numeriske model, og den kan ved indsættelse af de rette parametre ($\eta_0 = \eta_\infty$) give det samme output som et oscillerende newtonsk flow. Ligeledes giver den også det samme som den statiske newtonske strømning, hvis vi giver et statisk input. Den viser også ikke-lineære træk, når data for en oscillerende generaliseret newtonsk væske indsættes. På baggrund heraf mener vi, at der er god mulighed for at den numeriske model er anvendelig.

10 Fejlkilder

Som vi har set i analysen af glycerinmålingerne, er der store uoverensstemmelser mellem de målte data og teorien. I dette kapitel vil vi komme med mulige forklaringer på hvad afvigelserne skyldes. Mange af disse mulige fejlkilder er vi først blevet opmærksomme på efter at apparatet er taget ned igen. Vi har derfor ikke kunne undersøge deres bidrag eksperimentelt, og det er ikke lykkedes os af finde en fyldstgørende forklaring på uoverensstemmelserne. Men vi vil alligevel forsøge af teoretisk vej at give et overslag over de enkelte bidrag.

Vi vil ikke gå i detaljer med usikkerhederne i vores eksperimenter, såsom måleusikkerheden på vores elektriske komponenter (vægt og tryksensor). Sammenlignet med de store afvigelser er usikkerhederne så små, at vi i denne sammenhæng tillader os at se bort fra dem. Det ses også på vores måledata, som faktisk er pæne ikke alt for udtværede kurver som vist i kapitel 9.

10.1 Tryksensorens placering på rørstudene

Vi ønsker at tjekke hvor stor betydning det har for det målte tryk, hvis de to slanger mellem glasstuds og tryksensor ikke er placeret præcist symmetrisk omkring glasrøret. Det vil sige at de to tværsnitarealer A_1 og A_2 hvor trykslangerne er tilsluttet rørstudserne ikke er ens, selv om de er lavet af en dygtig glaspuster. Ifølge kontinuitetsligningen for en inkompressibel væske er

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (10.1)$$

Heraf ses at de to tilsvarende hastigheder v_1 og v_2 i røret vil være forskellige. Dette vil så ifølge Bernoulli's ligning

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \textit{konstant} \quad (10.2)$$

give anledning til et trykbidrag, som vi jo ikke er interesserede i. Vi har målt de ydre diametre (med en skydelære) til at være lige store med 0,1 millimeters nøjagtighed. Med mulighed for variation af glastykkelsen, vil nøjagtigheden på den indvendige diameter højst afvige i størrelsesorden 1 millimeter. Vi vil her lave en usikkerhedsberegning af trykforskellen som funktion af radiusforskellen.

På højresiden af Bernoulli's ligning står en konstant. Den vil være den samme for alle strømmer i flowet hvis flowet er laminart Feynman (1964). Det er derfor muligt at indsætte en gennemsnitshastighed $\langle v \rangle$ i ligning 10.2, da den gælder for alle strømmer og derfor også for gennemsnittet. Hvis vi trækker de to ligninger for hver af de to ender fra hinanden fås (da de to ender befinder sig på samme niveau kommer der ikke et bidrag af potentiel energi)

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2} (\langle v_1 \rangle^2 - \langle v_2 \rangle^2) \Leftrightarrow \quad (10.3)$$

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q_1^2}{A_1^2} - \frac{Q_2^2}{A_2^2} \right) \quad (10.4)$$

da $Q_1 = Q_2$ fås

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} Q^2 \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right) \quad (10.5)$$

Arealerne er næsten ens, så vi kan kalde $A_2 = A_1 + \Delta A$, hvor ΔA er arealforskellen. Så fås

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{\rho}{2} Q^2 \left[\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{(A_1 + \Delta A)^2} \right] \\ &= \frac{\rho}{2} Q^2 \left[\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_1^2} \left(1 + \frac{\Delta A}{A_1} \right)^{-2} \right] \\ &\approx \frac{\rho}{2} Q^2 \left[\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_1^2} \left(1 - 2 \frac{\Delta A}{A_1} \right) \right] \\ &\approx \frac{\rho}{2} Q^2 \left[2 \frac{\Delta A}{A_1^3} \right] \\ &\approx \frac{\rho Q^2 \Delta A}{A_1^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\rho Q^2 \pi (\Delta R)^2}{(\pi R^2)^3} \\ &\approx \frac{\rho Q^2 (\Delta R)^2}{\pi^2 R^6} \end{aligned} \quad (10.6)$$

hvor vi fra anden til tredje skridt har rækkeudviklet $(1+x)^n \approx 1+nx$.

For at beregne den største trykforskel som en assymmetrisk placering af rørstudsene kan forårsage, bruger vi det største flow. Dette vil være givet ved den største nettoflow-amplitude (som er $9,82 \times 10^{-6}$ i måleserie 4) gange vinkelfrekvensen. Dette giver en værdi af det største flow på $6,2 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$. Studsens radius er på 1 cm , variationen på den 1 mm og vi får derfor ved indsættelse i ligning 10.6

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{1116 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(6,2 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)^2 \cdot (0,001\text{m})^2}{\pi^2 (0,01\text{m})^6} \\ &\approx 5,7 \times 10^{-3} \text{ Pa} \end{aligned} \quad (10.7)$$

som svarer til en vandsøjle på en lille μm . Da vi oscillerer med højdeforskelle i størrelseorden cm , har denne fejlkilde ikke betydning.

10.2 Siliconeslangen

Den tykke siliconeslange (jf. figur 7.1) er valgt da den er blød og derfor kan følge med det oscillerede kars bevægelse. Men dens blødhed eller elasticitet gør også, at den vil kunne ophobe noget af væsken, da den vil udvide sig under det påførte tryk. Dette vil kunne forstyrre vores vægtmåling, idet en del af flowet ikke vil ende på vægten, men befinde sig i slangen.

Væskeophobningen i den del af siliconeslangen der sidder på det oscillerende kar har ikke betydning for vores forsøg. Den vil i princippet kunne forsinke trykoscillationen, men da den måles præcist af tryksensoren som sidder efter den del af slangen, får det ikke betydning, idet trykket der når til rørstudsene, betragtes som in-puttet.

Men elasticiteten af den siliconeslange der sidder mellem rør og vægt vil som sagt forstyrre vores vægtmåling og vi vil gerne vide i

hvor høj grad. I (Rønne; 1976, s. 109) er det ophobede væskevolumen ΔV i en slange netop beregnet. Det angives til

$$\Delta V = \frac{2 \cdot r \cdot \Delta P \cdot V}{E \cdot d} \quad (10.8)$$

hvor r og d er hhv. rørets radius og vægtykkelse og V slangens volumen inden udvidelsen. E er Youngs modul, som beskriver forholdet mellem stresset og den relative forlængelse af et stof. ΔP er trykket i røret som i vores tilfælde er vil være en hvis del af det samlede trykfald mellem de to kar, som er givet ved $\rho g \Delta h$ (jf. ligning 7.1). Vi vurderer at maksimalt 15% af trykfaldet vil finde sted i den relevante 0,3 m lange siliconeslange mellem kar og vægt. Glasrøret er minimum 0,5 m langt og siliconeslangen mellem det oscillerende kar og glasrøret er ca. 1,2 m langt hvilket giver slangen en længdeandel på 15%.

Væskeophobningen vil være størst ved den største trykgradient, som optræder ved vores maksimale højdeforskel på 5 cm. Dette giver en trykforskel på $\Delta P = \rho g \Delta h = 1116 \text{ kg/m}^3 \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 0,05 \text{ m} = 547 \text{ Pa}$, hvoraf altså de 82 Pa vil være trykforskellen over slangen. Med en radius $r = 0,015 \text{ m}$, vægtykkelse $d = 0,004 \text{ m}$ og et modul på $E = 4 \times 10^6 \text{ Pa}$ fås

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{2 \cdot 0,015 \text{ m} \cdot 82 \text{ Pa} \cdot \pi \cdot (0,015 \text{ m})^2 \cdot 0,3 \text{ m}}{4 \times 10^6 \text{ Pa} \cdot 0,004 \text{ m}} \\ &\approx 3 \times 10^{-8} \text{ m}^3 \\ &\approx 0,03 \text{ cm}^3 \\ &\approx 0,03 \text{ ml} \end{aligned} \quad (10.9)$$

Væskeophobningen vil altså gøre, at vores nettoflow bliver maksimalt 0,03 ml for småt, til et givent tidspunkt. I alle vores målinger får vi imidlertid et for stort nettoflow i forhold til modellerne, så væskeophobning i siliconeslangen må blive overskygget af en større og modsat virkende fejlkilder.

Hvad væskeophobningen i siliconeslangen betyder for faseforskydningen udregnes ved tidsforsinkelsen τ af signalet ved hjælp af følgende udtryk (Nørregaard et al.; 1993, s. 23)

$$\tau = \frac{L}{\sqrt{\frac{Ed}{2r\rho}}} \quad (10.10)$$

Med en slangelængde på højst $L = 0,6 \text{ m}$, får vi en forsinkelse i størrelsesorden $\tau \approx 0,03 \text{ s}$. Det er så kort tid at det ikke kan forklare faseforskydningen der er overskredet med ca. 2 s ved $0,2 \text{ Hz}$ målingerne.

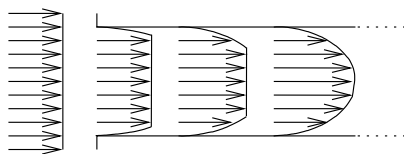
10.2.1 Slangerne til tryksensoren

Tryksensoren er forbundet med røret via plasticslanger, som er betydelig hårdere end siliconeslangerne. Vi har af samme årsag ikke målt Youngs modul på disse slanger, da vi ikke forventer at væskeophobning og tidsforsinkelse er et problem her.

10.3 Randeffekter

I vores model af rørstrømmene har vi ikke taget hensyn til randeffekter ved væskens indløb i røret. Væsken entrerer røret som et uniformt flow (se figur 10.1). Herefter vil friktionen mod rørets væg bremse den nærmeste væske, som pga. væskens viskositet vil bremse det næste lag væske osv. Først efter en vis tid vil hele flowet være fri af randeffekten og antage sin endelige form.

En vurdering af størrelsesordenen af hvor langt randeffekterne strækker sig ind i røret, vil svare til rørets diameter. Da dette er i størrelsesorden $0,5 \text{ cm}$ er det altså med rørets to indløb ca. 1 cm af rørets samlede længde på minimum $0,5 \text{ m}$ der ikke har den relevante hastighedsprofil. At et par procent af røret har et lidt større flow, har vi valgt at se bort fra.



Figur 10.1 Randeffekter ved væskens indløb i røret.

Måling	\hat{Re}_{max}	\hat{Re}_k
1	11	229
2	56	229
3	41	162
4	439	319
5	74	451
6	347	451
7	49	319
8	269	319

Tabel 10.1 Tabel over de maksimale og kritiske værdier af Reynoldtallet.

10.4 Turbulens

Som beskrevet i afsnit 4.1 er den kritiske værdi \hat{Re}_k af Reynoldtallet givet ved $250 \times \alpha$. Vi har beregnet dette tal og det maksimale Reynold-tal for måleserierne foretaget på glycerinopløsningen, se tabel 10.1. For xanthangummi-opløsningen er α ikke defineret. Det ses at det kun er i måleserie 4 at det kritiske Reynold-tal bliver overskredet. Vi vil derfor ikke betragte turbulens som en mulig årsag til vores afvigelser.

I afsnit 4.1 beskrev vi også det kritiske Reynold-tal på 0,5 ved indsnævringen i glasstudsens. Med studsens radius på 1 cm, får vi Reynold-tal fra 73 til 1542 for alle måleserierne. Disse tal er jo afgjort meget større end 0,5, men om betingelsen simpelthen er for streng til at vurdere strømmingen igennem studsens eller der rent faktisk opstår turbulens efter glasstudsens, ved vi ikke.

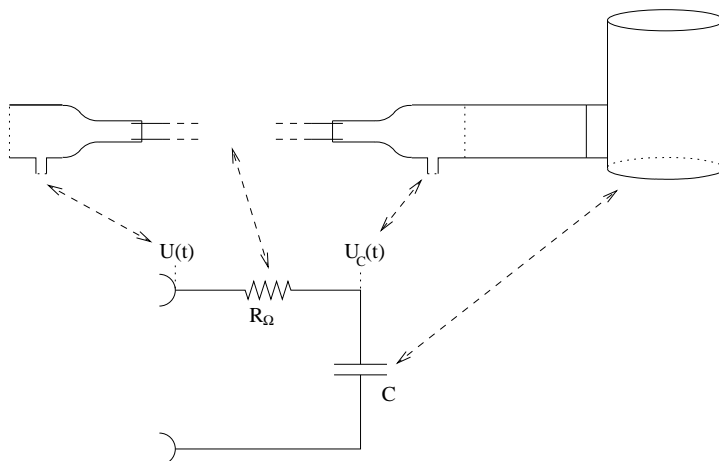
Det ville føre for vidt, at gå yderligere i dybden med turbulent flow i dette projekt. Men da vi får relativt pæne sinusformede data for samtlige tryk- og vægtnålinger, kan vi ikke forestille os, at det kan være årsagen til vores afvigelser.

10.5 Væskestanden i vægtkarret

I løbet af en oscillationsperiode vil væskestanden i vægtkarret ændre højde. Det betyder, at der opstår et modtryk til det tryk, som det oscillerende kar genererer. Vi vil nu lave et overslag på hvor stor

indvirkning det har på trykamplituden og fasedrejningen af flowet.

Vi betragter problemet ved at opstille et elektrisk netværk som analogi til vores forsøgsapparat. Vi betragter derfor nu glasrøret som en modstand og tilløbskarret som en kapacitor.



Figur 10.2 Et elektrisk netværk som analogi til vores forsøgsapparat.

Vi måler trykforskellen mellem rørenderne, hvilket svarer til spændingsforskellen hen over modstanden $U(t) - U_c(t)$ i det elektriske netværk. Tilløbskarret kan betragtes som en kapacitor. Lige som en elektrisk kapacitor oplades, når der ophobes elektrisk ladning på den, oplades karret ved ophobning af væske. Kapacitans er givet ved mængden af ladning i forhold til potentialet. For karret er det mængden af væske (volumenet) i forhold til trykbidraget. Trykket afhænger ikke af væskemængden, men af højden på væskesøjlen. Hvis man har et kar med en lille diameter, vil der ophobes mindre væske til den samme højde, end hvis karret havde en stor diameter. Karrets kapacitans er derfor givet ved

$$C = \frac{Ah}{\rho gh} = \frac{A}{\rho g} \quad (10.11)$$

Betragter nu Ohms lov givet ved (noterer modstanden som R_Ω , så den ikke forveksles med rørets radius R)

$$U = R_\Omega \cdot I \quad (10.12)$$

hvor spændingen svarer til trykket og strømmen til flowet, altså væskevolumen pr. tid. Hvis vi betragter ligningen for Poiseuille flow (ligning 5.16),

$$Q = -\frac{dp}{dz} \frac{\pi R^4}{8\mu} \quad (10.13)$$

hvor $-\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta P}{L}$. Omskriver udtrykket så modstanden i røret R_{ror} er givet ved forholdet mellem trykforskel og flow

$$\begin{aligned} \Delta P &= R_{ror} \cdot Q \\ &= \frac{8\mu L}{\pi R^4} Q \end{aligned} \quad (10.14)$$

Vi vil nu opstille en differentialligning for af finde spændingsforskellen $U(t) - U_c(t)$. Da $U(t)$ er inputtet, kan vi beskrive den som

$$U(t) = e^{i\omega t} \quad (10.15)$$

For en elektrisk kapacitor er sammenhængen mellem ladning q og spænding givet ved

$$q = C \cdot U_c(t) \quad (10.16)$$

hvor C er kapacitansen. Nu kan vi opstille Ohms lov og indsætte

$$U(t) - U_c(t) = RI(t) \quad (10.17)$$

Strømmen er givet ved ladning pr. tid. Det giver os ud fra ligning 10.16 at

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_c(t)}{dt} \quad (10.18)$$

som vi indsætter i ligning 10.17 og som elektrisk analogi til ligning 10.14 får

$$U(t) - U_c(t) = R_{\Omega} C \frac{dU_c(t)}{dt} \quad (10.19)$$

Dette er en første ordens differentialligning af typen

$$y' + f(t)y = g(t) \quad (10.20)$$

som har løsningen

$$y = e^{-F(t)} \left[\int e^{F(t)} g(t) dt + K \right] \quad (10.21)$$

hvor K er en konstant. Differentialligning 10.19 bringes på formen 10.20

$$U(t) - U_c(t) = R_\Omega C \frac{dU_c(t)}{dt} \Leftrightarrow \quad (10.22)$$

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{R_\Omega C} U_c(t) = \frac{1}{R_\Omega C} U(t) \quad (10.23)$$

hvor det ses at

$$\begin{aligned} y &= U_c(t) \\ y' &= \frac{dU_c}{dt} \\ f(t) &= \frac{1}{R_\Omega C} \\ F(t) &= \int f(t) dt = \frac{t}{R_\Omega C} \\ g(t) &= \frac{1}{R_\Omega C} U(t) = \frac{1}{R_\Omega C} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

og løsningen derfor er givet ved

$$\begin{aligned} U_c(t) &= e^{-\frac{t}{R_\Omega C}} \left[\int e^{\frac{t}{R_\Omega C}} \frac{1}{R_\Omega C} e^{i\omega t} dt + K \right] \\ &= e^{-\frac{t}{R_\Omega C}} \left[\frac{1}{R_\Omega C} \int e^{(i\omega + \frac{1}{R_\Omega C})t} dt + K \right] \\ &= e^{-\frac{t}{R_\Omega C}} \left[\frac{1}{R_\Omega C} \frac{1}{i\omega + \frac{1}{R_\Omega C}} e^{(i\omega + \frac{1}{R_\Omega C})t} + K \right] \\ &= e^{-\frac{t}{R_\Omega C}} \left[\frac{1}{1 + i\omega R_\Omega C} e^{(i\omega + \frac{1}{R_\Omega C})t} + K \right] \\ &= \frac{1}{1 + i\omega R_\Omega C} e^{i\omega t} + K e^{-\frac{1}{R_\Omega C} t} \quad (10.24) \end{aligned}$$

Det sidste led $K e^{-t/R_\Omega C}$ kaldes transienten og er forsvindende som tiden går. Det betyder, at systemet går mod periodisk ligevægt.

Det som vi i vores eksperimenter egentlig måler er realdelen af $U(t) - U_c(t)$. Det gør vi først efter at systemet er kommet i ligevægt og derfor er $K = 0$. Spændingsforskellen er derfor givet ved

$$\begin{aligned} \Delta U(t) &= \operatorname{Re}[U(t) - U_c(t)] \\ &= \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} - \frac{1}{1 + i\omega R_\Omega C} e^{i\omega t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left[\left(1 - \frac{1}{1 + i\omega R_{\Omega} C} \right) e^{i\omega t} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[\left(\frac{i\omega R_{\Omega} C}{1 + i\omega R_{\Omega} C} \right) e^{i\omega t} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\omega^2 R_{\Omega}^2 C^2 + i\omega R_{\Omega} C}{1 + \omega^2 R_{\Omega}^2 C^2} \right) e^{i\omega t} \right] \\
&= \frac{\omega^2 R_{\Omega}^2 C^2 \cos(\omega t) - \omega R_{\Omega} C \sin(\omega t)}{\omega^2 R_{\Omega}^2 C^2 + 1} \quad (10.25)
\end{aligned}$$

For store ω går $\Delta U(t)$ mod $\cos(\omega t)$ dvs. $U(t)$. For små ω går $\Delta U(t)$ mod $-\omega \sin \omega t$ dvs. 0 (og $U(t) = U_c(t)$).

Af udtrykket for $\Delta U(t)$ i ligning 10.25 fremgår det også at $\omega = \frac{1}{R_{\Omega} C}$ er en karakteristisk frekvens for systemet. Her vil trykbidraget fra tilløbskarret være lige så stort som inputtet $U(t)$. Ved indsættelse af $\omega = \frac{1}{R_{\Omega} C}$ i ligning 10.25 fås nemlig

$$\Delta U(t) = \frac{\cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{2}$$

$\frac{1}{R_{\Omega} C}$ -leddets ækvivalens i vores eksperiment fås ved at betragte ligning 10.11 og ligning 10.14, som angiver værdien af hhv. R_{ror} og C

$$\frac{1}{R_{\Omega} C} = \frac{\pi R^4 \rho g}{8\mu L A} \quad (10.26)$$

For $R = 2,85 \text{ mm}$, $L = 1 \text{ m}$, $\mu = 3,5 \times 10^{-3} \text{ Pas}$, $A = \pi \cdot (0,04 \text{ m})^2$ og $\rho = 1116 \text{ kg/m}^3$ bliver $\frac{1}{R_{\Omega} C} \approx 162 \text{ rad}$, hvilket svarer til en frekvens på $\nu = \frac{1}{390} \text{ Hz} = 0,0026 \text{ Hz}$. I vores eksperiment kører vi med frekvenser på 0,1 og 0,2 Hz , som altså er ca. 50-100 gange større end denne karakteristiske frekvens. Dermed er $\Delta U(t) \approx 0$ (jf. ligning 10.25) og dermed ikke skyld i nogen nævneværdig faseforskydningen.

10.6 Væskeaccelerationsbidrag til vægten

En anden fejlkilde er at væskeoverfladen i vægtkarret ændrer højde. Væskens vertikale hastighedsændring giver et modsatrettet afsæt som kraftbidrag til vægten. Vi vil nu lave et overslag på denne fejl.

Højden på vandstanden er givet ved

$$h = h_A \cos(\omega t) + h_0 \quad (10.27)$$

Dens hastighedsændring er den dobbeltdifferentierede

$$-\frac{d^2h}{dt^2} = \omega^2 h_A \cos(\omega t) = \omega^2 (h - h_0) \quad (10.28)$$

Det samlede kraftbidrag må derfor være (antager at $h_0 = 0$, da det er et spørgsmål om at kalibrere vægten)

$$F_{res} = hA\rho g - \frac{d^2h}{dt^2} A\rho h \alpha \quad (10.29)$$

hvor $0 \leq \alpha \leq 1$ angiver hvor stor en del af væsken, der bidrager til det modsatte kraftbidrag. I værste fald er $\alpha = 1$ og vi får

$$\begin{aligned} F_{res} &= A\rho h \left[g - \frac{d^2h}{dt^2} \right] \\ &= A\rho h \left[g + \omega^2 h \right] \\ &= A\rho g h_A \cos(\omega t) + A\rho \omega^2 h_A^2 \cos^2(\omega t) \\ &= A\rho h_A \left[g \cos(\omega t) + \omega^2 h_A \cos^2(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (10.30)$$

Vi ser, at $g \gg \omega^2 h_A$ siden $g \approx 10$ og ω ikke er meget større end 1 og h_A er i størrelsesorden højst 0,01 m. Deraf konkluderer vi, at det ekstra bidrag ikke har nogen betydning. Vi ville også have kunne observere \cos^2 -bidraget på målingerne, hvilket vi ikke gjorde.

10.7 Mulige forklaringer

Vi har som sagt ikke fundet frem til den afgørende fejlkilde, men der er par ting, som vi har stærk mistanke til. Det ene er tryksensorens følsomhed. Vi får godt nok pæne måledata, men tryksensoren er ikke dimensioneret til tryk på kun nogle få centimeters vandsøjle.

Vi har desværre ikke haft mulighed og tid til at undersøge sensoren i detaljer. Men det kunne tænkes, at den brugte noget tid til at reagere på et signal, og derfor gav et for lille udslag. Når vi udregner trykket ud fra højdeamplituden, får vi et større tryk end det vi målte. Eksempelvis vil en højde på 5 cm, give et tryk i størrelsesorden 500 Pa, hvor tryksensoren har registreret omkring 350

Pa (den 13. måleserie i skema 8.2). Det kan også forklares ved, at noget af trykforskellen foregår andre steder i systemet.

Et andet sted hvor vi har mistanke om at en stor fejlkilde gemmer sig er i vægten. Den bruger tid på at indstille sig, hvilket direkte kan observeres. Hvis man eksempelvis forsigtigt lægger et lille stykke papir, som kun vejer nogle få gram, så tager det vægten over et sekund, før den er stabil. Vi har desværre heller ikke fundet tid til at undersøge denne fejlkilde nærmere.

11 Konklusion

Vi satte os for, at undersøge om nettoflowet af en xanthangummi/glycerin-opløsning som modelvæske for blod, i et oscillerende flow i et stift lige rør kunne beskrives som en generaliseret newtonsk væske. Vi foretog derfor eksperimenter hvor inputtet var en sinusoidal trykgradient og output det kumulerede flow (nettoflowet).

For at vurdere opstillingens anvendelighed foretog vi også målinger på en newtonsk glycerinopløsning. Vi fandt store uoverensstemmelser mellem vores indsamlede måledata og en opstillet matematisk beskrivelse af det newtonske system. På baggrund heraf konkluderer vi at forsøgsapparatet i sin nuværende form ikke er anvendeligt. Dog skal det tilføjes, at apparatet producerer pæne måledata, som også er reproducerbare. Vi vil derfor formode at en af os uopdaget systematisk fejl er skyld i uoverensstemmelserne.

Den matematiske modellering af modelvæsken er ligesom for glycerinopløsningen sket ved, udfra den relevante konstitutive ligning, at løse Navier-Stokes ligning. For modelvæsken er dette en parabolisk partiel differentialligning, som løses numerisk i Matlab. Xanthangummi-målingerne passer heller ikke med modellen, hvilket er forventeligt pga. apparatets uanvendelighed.

På baggrund af ovenstående er vi ikke i stand til at afgøre om hvorvidt modelvæsken opfører sig som en generaliseret newtonsk væske.

A M filer

Her følger m-filerne for den oscillerende strømning af hhv. en newtonsk (A.1) og en generaliseret newtonsk væske (A.2).

A.1 Newtonsk væske

```
% Grafer af hastighedsprofiler af pulserende flow (Womersley)
clear;

nu = 1; % Frekvens i Hertz
h = 0.04; % højdeamplitude [m]

tint = 12; % Tidsintervaller
rint = 100; % R-intervaller
'----- Rørets geometri -----'
a = [0.8 1.45 2.45 2.85]*1e-3; % rørets radius
L = 1/2; % rørets længde
'----- Væskens egenskaber -----'
rho = 1e+3; % massefylde
mu = 8.9e-4; % viskositet
'----- Parameter der ikke skal ændres -----'
omega = 2*pi*nu; % vinkelfrekvens ved 'nu' hertz
alpha = (a.*(omega*rho/mu)^(1/2)); % Womersley-tal
'----- Genererer hastighedsprofiler -----'
% u(j,l,k) - hastighedsprofil
% w(j,l,k) - er u(j,l,k) forskudt for at få et pænere plot
% Q(j,l,k) - er flowet
% F(j,l,k) - er nettoflowet
t = linspace(0/(2*nu),1/(2*nu),tint+1); % Tidsvektor (fra,til,skridt)
for j = 1:length(t)
    for k = 1:length(a)
        r(k,:) = -a(k):a(k)/(rint/2):a(k);
        for l = 1:length(r(k,:))
            A = h*rho*9.82/L;
            u(j,l,k) = real((i*A)/(rho*omega)*((BESSELJ(0,(alpha(k)*r(k,l)/a(k))...
                *i^(3/2)))/(BESSELJ(0,(alpha(k)*i^(3/2)))-1)*exp(i*omega*t(j)));
            w(j,l,k) = u(j,l,k)*300 + (t(j)*360*nu);
            Q(j,k) = real(A*(2*pi*i)/(rho*omega)*((a(k)^2*BESSELJ(1,(alpha(k)*i^(3/2)))...
                /(alpha(k)*i^(3/2)*BESSELJ(0,(alpha(k)*i^(3/2)))-a(k)^2/2)*exp(i*omega*t(j)));
            F(j,k) = real(A*(2*pi)/(rho*omega^2)*((a(k)^2*BESSELJ(1,(alpha(k)*i^(3/2)))...
                /(alpha(k)*i^(3/2)*BESSELJ(0,(alpha(k)*i^(3/2)))-a(k)^2/2)*exp(i*omega*t(j)));
        end
    end
end
```

```
'----- Plotter hastighedsprofilerne -----'
figure(1)
for k = 1:length(a)
    subplot(1,length(a),k)
    plot(r(k,:)./a(k),w(:,k),'-');
    axis([-1 1 t(1)*360*nu-5 t(length(t))*360*nu+5 ]);
    set(gca,'YTick',t(:)*360*nu)
    set(gca,'XTickLabel',{'R','0','R'})
    xlabel(['R = ',num2str(a(k)*1e+3),' mm'],'FontSize',12)
    title(['\alpha = ',num2str(round(alpha(k)*100)/100),'FontSize',12])
end
```

A.2 Generaliseret newtonsk væske

```
function ointeori % TEORETISKE HASTIGHEDSPROFILER FOR OSCILLERENDE IKKE NEWTONSK FLOW

Radius = [0.8 1.45 2.45 2.85]*1e-3 % Rørets radius
nu = 10; % Oscillationsfrekvens
rho = 1116; % densitet
eta0 = 0.0795
etainfy = 0.00362
a = 2; lambda = 0.673; n = 0.499; % carreauparametere
omega = 2*pi*nu; % Vinkelfrekvens
alpha0 = round((Radius.*(omega*rho/eta0)^(1/2))*100)/100; % Womersley-tal (min)

Par = [rho omega eta0 etainfy a lambda n] % parametre i array

tf = 5/nu; % Slut tid ( varighed ) - sat til 5 perioder, hvor den sidste er i ligevægt

stepr = 51; % skridt for radius
stept = 2*(12*tf*nu)+1; % skridt pr periode * antal perioder +1
tspan = linspace(0,tf,stept); % tidsvektor

for j = 1:length(Radius)
    R(j) = Radius(j)
    rmesh(j,:) = linspace(0,R(j),stepr);
    sol = pdepe(1,@bspde,@bsic,@bsbc,rmesh(j,:),tspan,[],Par);
    u = sol(:,:,1);
    U(:,:,j) = u(end-(stept-1)/(tf*nu):end,:); % U(t,r) for den sidste periode - når der er ligevægt
    Tspan = linspace(0,1/nu,(stept-1)/(tf*nu)+1);
    drmesh = R(j)/stepr
    for i=1:length(Tspan)
        Shmax(i) = (U(i,end)-U(i,end-1))/drmesh;
    end
    Shmax = max(Shmax(:)) % Finder maks-shearrenten
    etamax(j) = [(Par(3)-Par(4))*[1+(Par(6)*Shmax).^Par(5)].^((Par(7)-1)/Par(5))+Par(4)]
    for i = 1:(length(Tspan)-1)/2+1
        V(i,:,j)=U(i,:,j)*16000+Tspan(i)*360*nu; % For smukkere plot
    end
    V1(:,:,j) = flipdim(V(:,:,j),2); % Spejler V over rmesh ( for et pænere plot )
    rmeshr(j,:) = linspace(-R(j),R(j),2*stepr-1); % Laver en radiusvektor fra -R til R
end
V1(:,end,:) = []; % Fjerner V-punktet i centrum
V2 = [ V1 V ]; % Laver en V-vektor fra -R til R

alphamax = round((Radius.*(omega*rho/etamax(j))^(1/2))*100)/100; % womersly tal (max)
```

```

figure(1)      % Plotter hastighedsprofiler
for j = 1:length(Radius)
    alpha = ([ ' ' num2str([alpha0(j)]) ' ; ' num2str([alphamax(j)]) ' ]')
    subplot(1,length(Radius),j)
    plot(rmeshr(j,:),V2(:, :,j),'-');
    axis([-R(j) R(j) min(V(1,1,:))-5 max(V(end,1,:))+5])
    set(gca,'XTick',[-R(j) 0 R(j)],'YTick',Tspan(:)*360*nu)
    set(gca,'XTickLabel',{'R','0','R'})
    xlabel(['R = ',num2str(Radius(j)*1e+3),' mm'],'FontSize',12)
    title(['\alpha = ',alpha],'FontSize',12)
end

for j = 1:length(Radius)
    figure(1+j)      % plotter 3D hastighedsprofiler
    mesh(rmesh(j,:),Tspan,U(:, :,j))
    Title(['Frekvensen \nu = ',num2str(nu),' Hz og radius a = ',...
        num2str(Radius(j)*1e+3),' mm'],'FontSize',20)
    axis([0 R(j) 0 max(Tspan) min(min(U(:,1,:))) max(max(U(:,1,:))) ])
    xlabel('r')
    ylabel('t')
    zlabel('u','Rotation',0)
end

% -----
% Subfunctions.
% -----
function [c,f,s] = bspde(rmesh,tspan,u,DuDr,Par)

c = Par(1);
f = [(Par(3)-Par(4))*[1+(Par(6)*DuDr).^Par(5)].^((Par(7)-1)/Par(5))+Par(4)]*DuDr;
s = DpDz*cos(Par(2)*tspan);

% -----
function u0 = bsic(rmesh,DuDr)
%BSIC  Begyndelseshastighed ved t = t0.
u0 = 0;

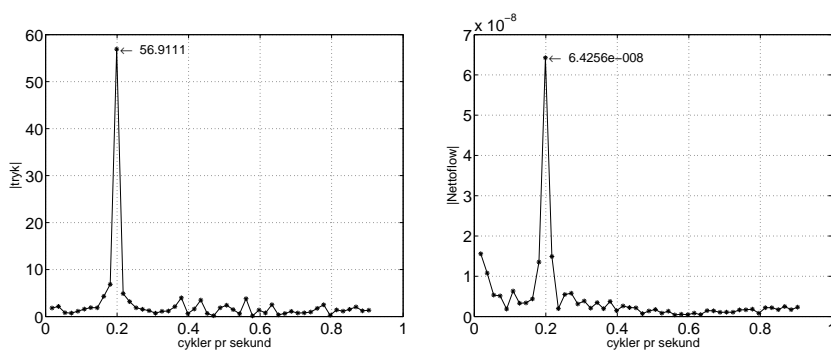
% -----
function tryk = DpDz(z)
%BSIC  Trykampletuden (sat her til 2cm vandsøjle).
tryk = 98*2;

% -----
function [pa,qa,pR,qR] = bsbc(ra,ua,rR,uR,tspan,Par)
%BSBC  Randbetingelser ved x = a og x = b.
pa = 0;
qa = 1;
pR = uR;
qR = 0;

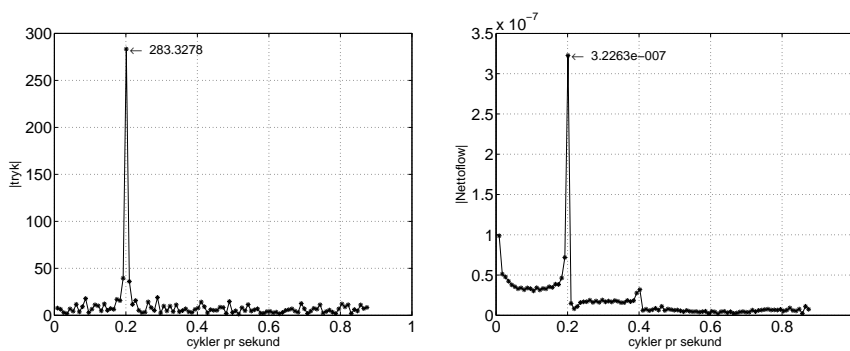
```


B Rådata

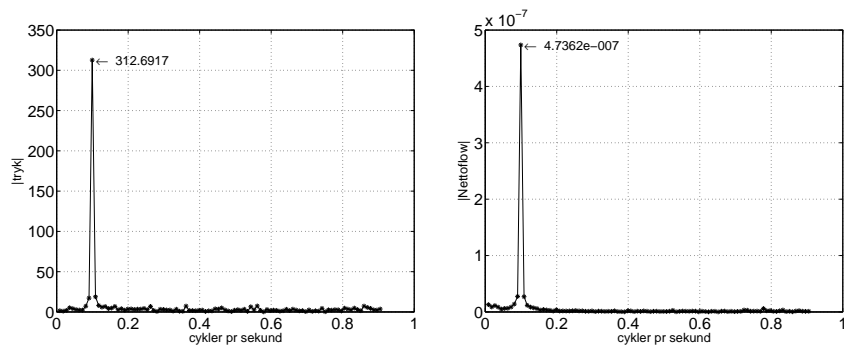
Her følger data fra vores 13 måleserier, defineret som angivet i tabel 8.1. Figureerne til venstre er Fourier-transformationen af trykdata og til højre Fourier-transformationen af nettoflow-data.



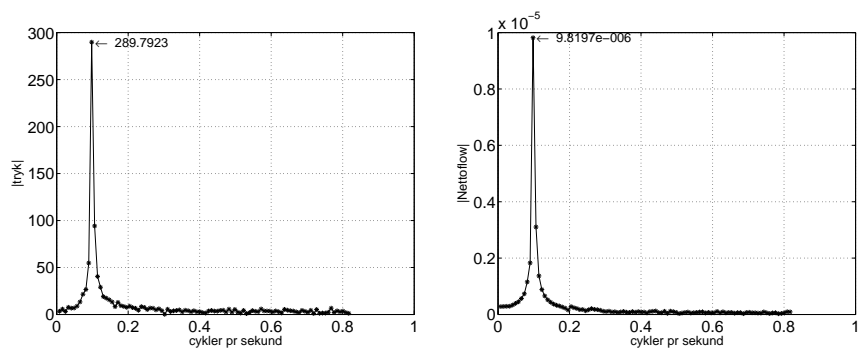
Figur B.1 Måleserie 1



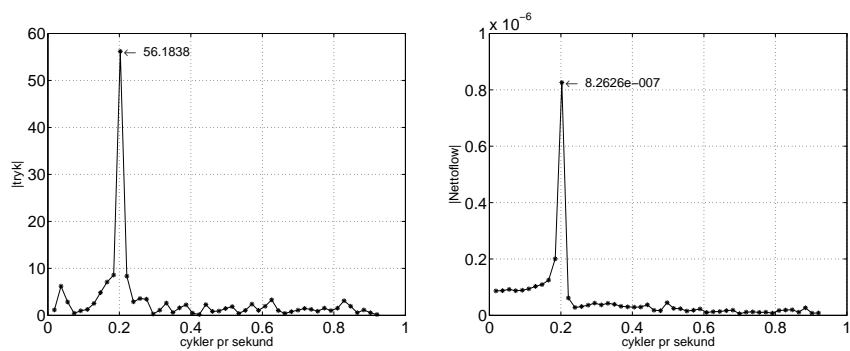
Figur B.2 Måleserie 2



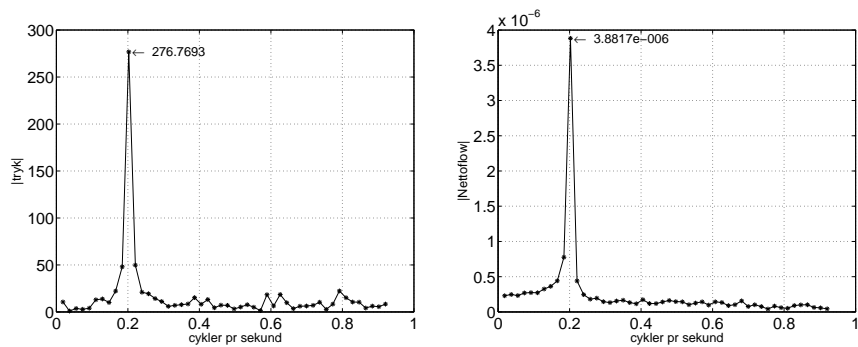
Figur B.3 Måleserie 3



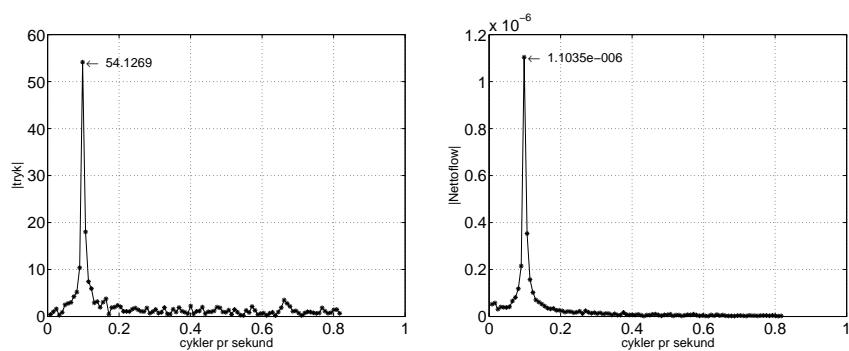
Figur B.4 Måleserie 4



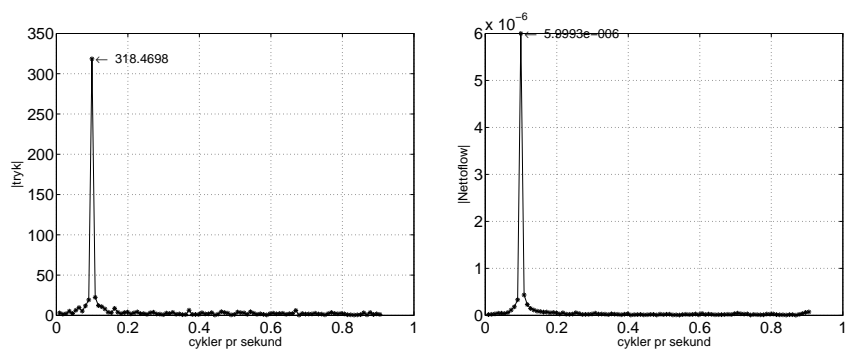
Figur B.5 Måleserie 5



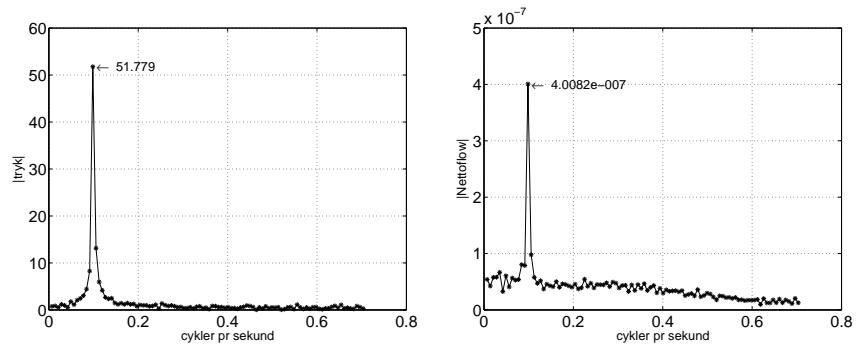
Figur B.6 Måleserie 6



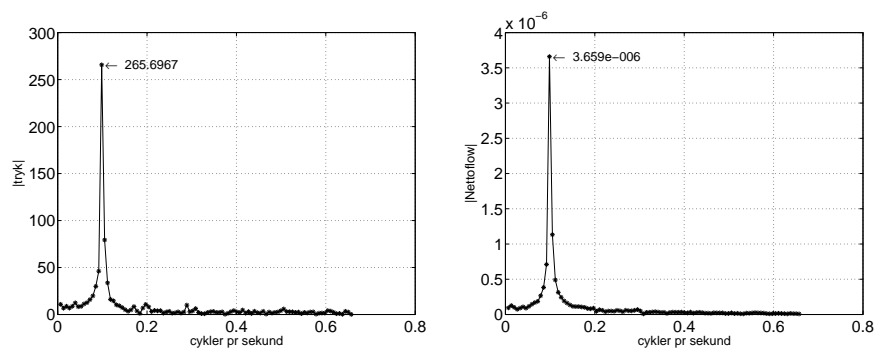
Figur B.7 Måleserie 7



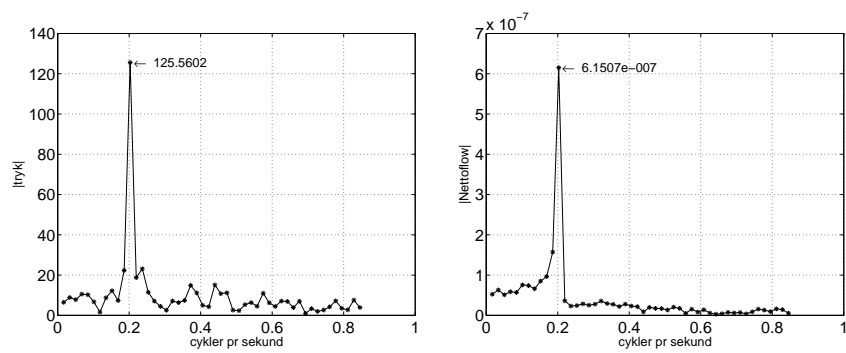
Figur B.8 Måleserie 8



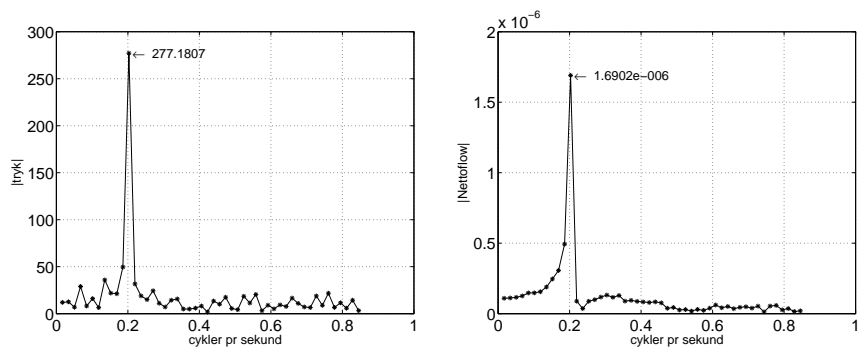
Figur B.9 Måleserie 9



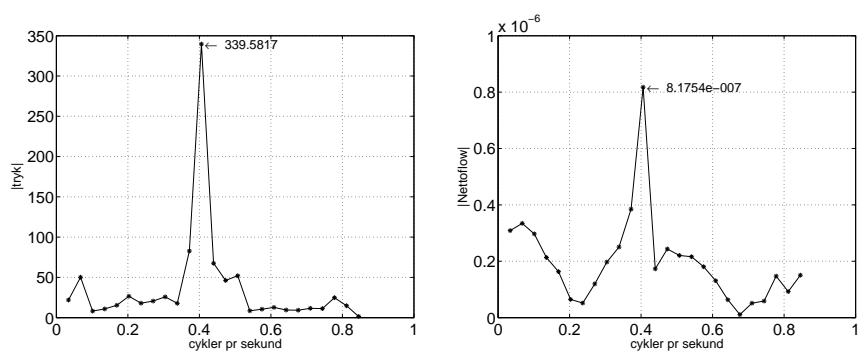
Figur B.10 Måleserie 10



Figur B.11 Måleserie 11



Figur B.12 Måleserie 12



Figur B.13 Måleserie 13

Litteratur

- Acheson, D. J. (1990). *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Oxford.
- Arfken, G. B. & Weber, H. J. (1995). *Mathematical methods for physicist - International edition*, Academic Press.
- Barnes, H. A., Hutton, J. F. & Walters, K. (1989). *An Introduction to Rheology*, Elsevier.
- Bird, R. B., Armstrong, R. C. & Hassager, O. (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 2, John Wiley and Sons.
- Bohlin VOR Software User Manual* (1989). Version 2.7 edn, Bohlin Rheology AB, Sweden.
- Brookshier, K. A. & Tarbell, J. M. (1993). Evaluation of a transparent blood analog fluid: Aqueous xanthan gum/glycerin, *Biorheology* **30**(2).
- Caro, C. G., Pedley, T. J., Schroter, R. C. & Seed, W. A. (1978). *The Mechanics of the Circulation*, Oxford University Press.
- F J H Gijsen, E Allanic, F. N. v. d. V. & Janssen, J. D. (1999a). The influence of the non-newtonian properties of blood on the flow in large arteries: unsteady flow in a 90° curved tube, *Journal of Biomechanics* **32**.
- F J H Gijsen, F. N. v. d. V. & Janssen, J. D. (1999b). The influence of the non-newtonian properties of blood on the flow in large arteries: steady flow in a carotid bifurcation model, *Journal of Biomechanics* **32**.
- Feynman, R. P. (1964). *Lectures on Physics*, Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Company.
- Fung, Y. C. (1990). *Biomechanics*, Springer-Verlag.
- Godiksen, R. B. & Larsen, T. (2002). Empirisk test af shovingmodellen, *Technical report*, Imfufa, Roskilde Universitetscenter.
- Higham, D. J. & Higham, N. J. (2000). *MATLAB Guide*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA.
- Hvidt, S. (1998). An introduction to rheology, *Technical report*, Department of Chemistry, Roskilde University.

- Jacobsen, C. S. (1998). *Introduktion til Fluid Mekanik*, DTU.
- Ku, D. N. & Liepsch, D. (1986). The effects of non-newtonian viscoelasticity and wall elasticity on a flow at a 90° bifurcation, *Biorheology* **23**(4).
- Liepsch, D. & Moravec, S. (1984). Pulsatile flow of non-newtonian fluid in distensible models of human arteries, *Biorheology* **21**(4).
- Milnor, W. R. (1982). *Hemodynamics*, Williams and Wilkins, Baltimore / London.
- Nørregaard, T., Ellegaard, J., Jalving, J., Pedersen, J. B., Gregeresen, P., Meyer, S. I. & Wittus, H. (1993). Aortamodellering, *Technical report*, Imfufa, Roskilde Universitetscenter.
- Olufsen, M. (1998). *Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator*, PhD thesis, Roskilde University, Denmark.
- Pedley, T. J. (1980). *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*, Cambridge University Press.
- Perktold, K. & Hilbert, D. (1986). Numerical simulation of pulsatile flow in a carotid bifurcation model, *Journal of biomedical engineering* **8**(3).
- Rindt, C. C. M. & v Steenhoven, A. A. (1996). Unsteady flow in a rigid 3-d model of the carotid artery bifurcation, *Journal of biomedical engineering* **118**.
- Rønne, P. (1976). *Medicinsk fysik*, 5. udgave edn, FADL's forlag.
- Shahcheraghi, N., Dwyer, H. A., Cheer, A. Y., Barakat, A. I. & Rutaganira, T. (2002). Unsteady and three-dimensional simulation of blood flow in the human aortic arch, *Journal of biomedical engineering* **124**(4).
- Spiegel, M. R. (1996). *Mathematical Handbook of Formulas and Tables; Schaum's outlines series*, 35th printing edn, McGraw-Hill.
- Tanner, R. I. (1988). *Engineering Rheology*, Clarendon Press, Oxford.
- Whitmore, R. L. (1968). *Rheology of the Circulation*, Pergamon Press.