E5 opgavesæt 6

Jogvan M. Poulsen

9. november 2001

Opgave 3.3.4

Vi skal bestemme de asymptotiske kurver og krumningskurverne for funktionen $z = xy$. Vi nøjes med at gøre det i punktet $(0, 0, 0)$.

Funktionen ser ud som følger:

$$X(u, v) = (u, v, uv) \tag{1}$$

For at finde alt det vi skal finde, skal vi bruge størrelserne E,F og G, så vi går igang med at finde dem først.

$$\begin{aligned} E &= 1 + v^2 \\ F &= uv \\ G &= 1 + u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ f &= \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \\ g &= 0 \end{aligned}$$

Nu kan vi opstille en matrix der er givet ved

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Vi finder nu egenverdierne for denne matrix som er hhv. -1 og 1 for hhv. $-k_1$ og $-k_2$ som er med egenvektorerne hhv. $(-1, 1)$ og $(1, 1)$. Dette betyder at krumningerne bliver $k_1 = 1$ i $x = y$-retningen og $k_2 = -1$ i $x = -y$-retningen.

De asymptotiske linier er langs x- og y-akserne, da krumninger her er 0

Opgave 3.3.11

Her bliver vi bedt om at overveje abesadlen S i eksempel 3.3.2. Vi skal lave Dupin indicatrix'en for punktet $p = (0, 0, 0)$ udfra definitionen i afsnidt 3.2, og sammenligne med kurven der skærer S med en plan paralel med $T_p(S)$ og tæt på p. Samt svar på hvorfor er de ikke tilnærmelses ens (jf. eksempel 3.3.5)?

Vi får opgivet i eksempel 2 s.159, at abesadlen som er givet ved $X(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u)$ og af $e = f = g = 0$ i punktet (0,0) som betyder at det er et 'plant'-punkt; $(k_1 = k_2 = 0)$.

En Dupin indicatrix er givet ved de vectorer w i $T_p(S)$ således at den anden fundamentalform er ± 1. Det betyder at:

$$\pm 1 = II_p(w) = k_1\xi^2 + k_2\eta^2 \tag{2}$$

Vived også at der gælder følgende:

$$II_p(\alpha) = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \tag{3}$$

Men da $e = f = g = 0 = II_p$ kan vi ikke finde nogen $k_1\xi^2 + k_2\eta^2 = 1$. Man kan også argumenter på anden måde. Da matricen $dN = 0$ udspænder den

0-rummet, og vil enhver vektor være egenvektorer med egenværdien =, som betyder at $k_1 = k_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Hvis vi ser på fladen når $z = 0$, dvs. $u^3 = 3v^2u$, får vi, at der er tre linjer i x, y-planen der ligger i fladen, nemlig: $x = 0$,$x = \sqrt{3}y$ og $x = -\sqrt{3}y$. Hvis vi forskyder x, y-planen en smule op eller ned (de er symetriske), får et kompliceret udtryk at regne på, så der vil jeg hellere henvise til tegningen jeg har lavet.

Hvad kan vi konkludere? Vi kan sige, at når der er tale om et plant punkt, eksisterer Dupin-indikatrixen ikke eksisterer, og derfor kan 'indikerer' den ikke så meget, bortset fra at den fortæller os, at vi befinder os på et plant punkt.

I øvrigt kan der nevnes, at figuren på side 159 i bogen er forkert. Vi kan se, at når $u = 0$, så er $x = z = 0$, derfor skal hele y-aksen ligge på fladen, med det gør den ikke på figuren, der ligger hele x-aksen.

Opgave 4.2.19

Vi får opgivet enhedskuglen $S^2 = \{(x.y.z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ og 'enheds'-cylinderen $C^2 = \{(x.y.z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ som er den sylinder der omslutter kuglen. (Det som vi kender fra Arkimedes sætning).

Funktionen Φ projecerer et punkt på kuglen (fraregnet nord- og sydpolerne) på cylinderen på følgende måde

$$\Phi : S^2 - \{(0,0,1) \cup (0,0,-1)\} = M \to C \tag{4}$$

således, at linien l der går fra et punkt q på z-aksen som skærer punktet p på kuglen vinkelret på z-aksen, vil projecere punktet p på cylinderen $\Phi(p)$ (se tegning)

Vi skal så vise, at Φ er arealbevarende, og at den Φ' er bijektiv (differmorphism).

Kuglen kan vi vælge at parameterisere som

$$X(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{5}$$

Ligeledes kan vi parametericere cylinderen

$$Y(\theta, \phi) = (\cos\phi, \sin\phi, \cos\theta) \tag{6}$$

Afbildningen Φ, hvor vi udfra et punkt på kuglen skal give et punkt på cylingeren er dermed givet ved

$$\Phi(x, y, z) = (\frac{x}{\sin\theta}, \frac{y}{\sin\theta}, z) \tag{7}$$

Her skal lige nevnes, at $V = \{(\theta, \phi) | 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ Vi skal nu finde $E, \bar{E}$ og $G, \bar{G}$ for kuglen og cylinderen henholdsvis.

Kuglen:

$$\begin{aligned} E &= 1 \\ F &= 0 \\ G &= \sin^2\theta \end{aligned}$$

Cylinderen:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \sin^2\theta \\ \bar{F} &= 0 \\ \bar{G} &= 1\end{aligned}$$

Det vil sige, at arealbevarelsen er opfylde idet at

$$\frac{\bar{E}}{E}\frac{\bar{G}}{G} = \frac{\sin^2\theta}{1}\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 \tag{8}$$

Og at vinkelbevarelsen er opfyldt tilnermelsesvis når $\theta = {}^{\pi}\!/_{2}$ Nemlig fordi

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{\bar{G}}{G} = \frac{\sin^2({}^{\pi}\!/_{2})}{1} = 1 \tag{9}$$

Spørgsmålet jeg stillet til mig selv her er så: Hvordan kan jeg være sikker på at jeg bare kan lave en parametrisering for hhv. X og Y som jeg har gjort, og at det skal holde? Parametriseringen Φ er konstrueret som vi bliver bedt om i opgaven. Så tror jeg, at hvis jeg kan finde to bijektive afbildninger hhv. X og Y, som afbilder fra samme mængde V, sådan at:$X : V \to M$ og $Y : V \to C$ og hvor der gælder at $Y = \Phi \circ X$ som også er bijektiv, så må det være rigtigt.

Til sørgsmålet om Φ er bijektiv, kan vi finde Φ^{-1}. Vi kan tydeligt se, at Φ er diffenentialbe, og hvis Φ^{-1} også er det, har vi svaret på problemet.

Funktionen $\Phi^{-1} : C \to M$ er givet ved

$$\Phi^{-1}(x, y, z) = (x \sin\theta, y \sin\theta, z) \tag{10}$$

Denne er også diffentiabel, og den rammer også alle punkter i M

Jeg ved godt at differmorphism betyder at den afledte har en differentialel invers, men hvis den afledte er bijektiv, er den også differmorphism, men nu ved vi også, at den inverse funktion også er arealbevarende. Flot ik'