E5 opgavesæt 5

Jogvan M. Poulsen

9. november 2001

Opgave 2.5.5

Opgaven lyder, at for en given funktion, hvor $z = f(x,u)$ er bla bla

$$A = \int_Q \int \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dxdy \tag{1}$$

Vi ved ud fra formel bla i do Carmo, at arealet af en flade er givet ved

$$A = \int_Q \int \sqrt{EG - F^2} dxdy \tag{2}$$

Hvis vi kan vise, at $EG - F^2 = 1 + f_x'^2 + f_y'^2$, så er vi færdige

Funktionen $X(u,v)$ kan skrives som

$$X(u.v) = (u.v.f(u.v)) \tag{3}$$

Deraf følger

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, f_u') \\ X_v &= (0, 1, f_v') \end{aligned}$$

Nu kan vi finde E,F og G

$$\begin{aligned} E &= < X_u, X_u >= (1 + f_u'^2) \\ F &= < X_u, X_v >= (f_u' f_v') \\ G &= < X_v, X_v >= (1 + f_v'^2) \end{aligned}$$

Hermed er

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (1 + f_u'^2)(1 + f_v'^2) - (f_u' f_v')^2 \\ &= (1 + f_u'^2 + f_v'^2 + f_v'^2 f_v'^2) - (f_v'^2 f_v'^2) \\ &= 1 + f_u'^2 + f_v'^2 \end{aligned}$$

Og det var det vi skulle vise

Opgave 3.2.4

Opgaven lyder: Antag at en flade S har den egenskab, at $|k_1| \leq 1$ og $|k_2| \leq 1$ overalt. Er det så sandt, at krumningen af en vilkårlig regulær kurve på S også opfylder at $|k| \leq 1$?

Hvis jeg forstår opgaven rigtigt, så siger den, at hvis den mindste og den største 'normalkrumning' på fladen numerisk er mindre eller lig 1, så vil vi ikke kunne lægge en vilkårlig (naturligparameteriseret) kurve på fladen med en krumning der numerisk er større end 1.

Det vil jeg påstå at vi kan. Set ud fra et geometrisk argument, så kan vi lægge en vilkårlig krum kurve hvor som helst på fladen - fx. en cirkel, og jo mindre cirkel jo større krumning, dermed kan k blive vilkårlig stor.

Vi ved også fra DEFINITION 3 (side 141) at $k_n = k \cos\theta$. Her kan vi se, at k kan være vilkårlig og give $|k_n| \leq 1$.