E5 opgavesæt 4

Jogvan M. Poulsen

9. november 2001

Opgave 2.4.7

Vi får opgivet funktionen $f : S \longrightarrow \mathbf{R}$ givet ved $f(p) = |p - p_0|^2$, hvor $p \in S$ og p_0 er et fast punkt (se eksempel 1 , sec. 2-3 i Carmo) Her skal vi vise, at $df_p(w) = 2w \cdot (p - p_0)$, $w \in T_p(S)$.

Vi vælger at anvende metoden der er opgivet i eksempel 1 side 86 i Carmo.

$$df_p(w) = \frac{d}{dt} f(\alpha(t))|_{t=0} = \alpha'(t) \cdot v = w \cdot v \tag{1}$$

Nu vælger en kurve $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow S$ hvor $\alpha(t) = p$ og $\alpha'(t) = w$. Nu kan vi indsætte

$$\begin{aligned} df_p(w) &= \frac{d}{dt}(\alpha(t) - p_0)^2|_{t=0} \\ &= 2\alpha'(t)(\alpha(t) - p_0)|_{t=0} && (2) \\ &= 2w \cdot (p - p_0) && (3) \end{aligned}$$

og det var det vi skulle vise.

Opgave 2.4.15

Her skal vi vise, at hvis alle normaler til en sammenhængende flade i rummet skærer gennem et fælles punkt p_0, er indeholdt i en kugleskal.

Her skal vi bruge noget fra den sidste opgave. Vi begynder med at sige, at hvis fladen er indekoldt i en kugleskal, så vil normalen $(p - p_0)$ stå vinkelræt på en vektor $w \in T_p(S)$. Dette medfører, at følgende ligning er opfylde

$$df_p(w) = 2w \cdot (p - p_0) = 0 \tag{4}$$

Hvis vi nu kan argumentere for at $|p - p_0|$ er konstant, så skulle vi nok være færdige, fordi hvis ikke den er konsktnt. Vi ved at fladen er sammen hængende, og $w \perp (p - p_0)$ for alle w og $(p - p_0)$. Hvis vi tager to tilfældige punkter på fladen p_1 og p_2, så vil $|p_1 - p_o| = |p_2 - p_0|$ fordi for alle p_x som ligger på en kurve mellem p_1 og p_2 skal gælde at normalen skærer i p_0. Vi har før vist, at der kun er en kugleskal (hvor $|p - p_o|$ er konskant) der opfylder dette.

Opgave 2.5.1d

Vi får opgivet en parameteriseret hyperboloide, givet ved

$$X(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u) \tag{5}$$

På side 61 får vi at vide, at en sådan hyperboloide er regulær. Vi skal nu omskrive den til første normalform. Først finder vi $X'_u og X'_v$

$$\begin{aligned} X'_u &= (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u) \\ X'_v &= (-a \sinh u \sin v, b \sinh u \cos v, 0) && (6) \end{aligned}$$

Nu kan vi finde:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= < X'_u, X'_u > \\ F(u_0, v_0) &= < X'_u, X'_v > && (7) \\ G(u_0, v_0) &= < X'_v, X'_v > && (8) \end{aligned}$$

Vi udregner

$$
\begin{aligned}
E &= a^2 \cosh^2 u \cos^2 v + b^2 \cosh^2 u \sin^2 v + c^2 \sinh^2 u \\
F &= -a^2 \cosh u \cos v \sinh u \sin v + b^2 \cosh u \sin v \sinh u \cos v) \qquad (9) \\
G &= a^2 \sinh^2 u \sin^2 v + b^2 \sinh^2 u \cos^2 v \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Vi skulle finde første normalform $I_p(X(u,v))$

$$
I_p(X(u,v)) = E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2 \qquad (11)
$$

Udtrykket bliver langt og uoverskueligt.

Vi skulle også finde toppunkt for hyperboloiden. Vi ved at når hyperboloiden er symertisk om z-aksen, så er toppunkter givet når $(x,y) = (0,0)$. Da $\sin v$ og $\cos v$ ikke kan være nul samtidig, er det kun når $\sinh u = 0$ så skal vi bare finde z-værdien til den u.

$$
\sinh u = 0 = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \Rightarrow u = 0 \qquad (12)
$$

Toppunktet ligger så i $(x,y,z) = (0,0,c)$ da $c\cosh(0) = 1$.

Opgave 31 (VLH)

Opgaven lyder:

En vindstille dag affyres der på en flad mark på samme tidspunkt et kanonslag i hvert af punkterne E og F med den indbyrdes afstand 680 meter. En observatør står i punktet A med afstanden 34 meter fra linien igennem E og F observerer, at braget fra E ankommer til ham $^2/_{10}$ sekund senere end braget fra F. Lydenshastighed sættes til 340 meter/sekund. Hvor langt står personen fra punktet F?

Hvis vi ser på side 37 om hyperblen, kan vi anvende denne metode til at løse problemet på.

Vi får følgende størrelser opgivet

$$
\begin{aligned}
|EF| &= 2ae = 680m \Rightarrow ae = 340m \\
|EA| &= 340^m/_s(t - \frac{2}{10}s) \qquad (13) \\
|FA| &= 340^m/_s t \qquad (14) \\
hjdeny &= 34m \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Vi ved at der gølder følgende for en hyperbel (side 37 - 40)

$$
|EP| - |FP| = 2a \qquad (16)
$$

Dette betyder at vi kan udregne følgende

$$
\begin{aligned}
a &= a = \frac{1}{2} \cdot 340^m/_s(\frac{2}{10}s) = 34m \\
ae &= 340m \Rightarrow e = 10 \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Vi kan udfra formel 2 på side 38 finde x

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{a^2(e^2-1)-y^2}{(e^2-1)}} \\
&= \sqrt{\frac{(34m)^2(10^2-1)-34^2}{(10^2-1)}} \qquad (18) \\
&= \sqrt{\frac{113288m^2}{99}} \qquad (19) \\
&\approx 34m \qquad (20)
\end{aligned}$$

Nu kan vi vhj. af Pythagoras finde $|FA|$

$$\begin{aligned}
|FA| &= \sqrt{y^2+(ea-x)^2} \\
&= \sqrt{34^2+(340-34)^2} \qquad (21) \\
&\approx 308m \qquad (22)
\end{aligned}$$

Hvis man skulle være interesseret i at finde $|EA|$, så er den bare $|EA| = |FA| - 68m = 240m$.