E5 opgavesæt 2

Jogvan M. Poulsen

9. november 2001

Opgave 1.5.8

Vi får opgivet sporet af en parameteriseret kurve med vilkårlig parameter som er givet ved:

$$\alpha(t) = (t, \cosh t), t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

og kaldes for kædelinien.

Opgave a Vi skal vise, at krumningen for kædelinien er

$$k(t) = \frac{1}{\cosh^2 t} \tag{2}$$

I opgave $1 - 5.12, d$ er der givet en formel $k(t)$ for en vilkårligtparameteriseret kurve i $\mathbf{R}^2$, (som vi tillader os at bruge her, da den opgave har været anvendt i undervisningen inden afleveringen af dette opgavesæt).

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \tag{3}$$

Vi udregner de enkelte størrelsr og indsætter

$$x = t, x' = 1, x'' = 0$$
$$y = \cosh t, y' = \sinh t, y'' = \cosh t$$

Vi indsætter

$$k(t) = \frac{1 \cdot \cosh t - 0}{(1 + \sinh^2 t)^{3/2}} = \frac{\cosh t}{(\cosh^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{\cosh^2 t} \tag{4}$$

Her har vi anvende at $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$.

Opgave b Her skal vi vise, at den 'evolute' af kædelinien er givet ved

$$\beta(t) = (t - \sinh t \cosh t, 2 \cosh t) \tag{5}$$

Der er givet en formel for den evolute funktion $\beta(t)$ i opgave 1.5.7, som er

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} n(t) \tag{6}$$

For at løse denne opgave, skal vi bruge den naturligt parameteriserede vektor $\alpha''(s)$ for at finde normalvektoren $n(s)$, som er vgivet ved

$$\alpha'' = k \cdot n \Rightarrow n = \frac{\alpha''}{k} \tag{7}$$

Til det skal vi bruge $\phi - funktionerne$ fra opgave 1.5.12, men først udregner vi nogle størrelser som vi skal bruge til at indsætte senere

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (1, \sinh t) && (8) \\ |\alpha'(t)| &= \sqrt{t^2 + \sinh^2 t} = \cosh t && (9) \\ \alpha''(t) &= (0, \cosh t) && (10) \\ \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) &= \sinh t \cosh t && (11) \end{aligned}$$

Nu kan vi indsætte i $\phi - funktionerne$

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= t && (12)\\
\phi'(s) &= \frac{1}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\cosh t} && (13)\\
\phi''(s) &= \frac{-(\alpha'(t)\cdot\alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^4} = \frac{-(\sinh t\cosh t)}{\cosh^4 t} = \frac{-\sinh t}{\cosh^3 t} && (14)
\end{aligned}$$

Vi kan nu finde funktionen $\alpha''(s)$

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= (\phi(s), \cosh(\phi(s))) && (15)\\
\alpha'(s) &= (\phi'(s), \phi'(s)\sinh(\phi(s))) && (16)\\
\alpha''(s) &= (\phi''(s), \phi''(s)\sinh(\phi(s)) + \phi'(s)^2\cosh(\phi(s))) && (17)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu og får

$$\begin{aligned}
\alpha''(s) &= (\frac{-\sinh t}{\cosh^3 t}, \frac{-\sinh t}{\cosh^3 t}\sinh t + \frac{1}{\cosh^2 t}\cosh t)\\
&= (\frac{-\sinh t}{\cosh^3 t}, \frac{-\sinh^2 t + \cosh^2 t}{\cosh^3 t})\\
&= (\frac{-\sinh t}{\cosh^3 t}, \frac{1}{\cosh^3 t}) && (18)
\end{aligned}$$

Nu kan vi endelig finde normalvektoren $n(s)$

$$n(t) = \frac{\alpha''(t)}{k(t)} = (\frac{-\sinh t}{\cosh^3 t}, \frac{1}{\cosh^3 t})\cdot\cosh^2 t = (\frac{-\sinh t}{\cosh t}, \frac{1}{\cosh t}) \qquad (19)$$

Efter alt dette besvær kan vi lige undersøge om $|n(t)| = 1$

$$= |n(t)| = \sqrt{\frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} + \frac{1}{\cosh^2 t}} = \sqrt{\frac{\sinh^2 t + 1}{\cosh^2 t}} = \sqrt{\frac{\cosh^2 t}{\cosh^2 t}} = 1 \qquad (20)$$

og det er den - heldigvis.

Nu kan vi endelig indsætte i den oprindelige ligning

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}n(t) && (21)\\
&= ((t, \cosh t) + \cosh^2 t(\frac{-\sinh t}{\cosh t}, \frac{1}{\cosh t}))\\
&= ((t, \cosh t) + (-\sinh t\cosh t, \cosh t))\\
&= (t - \sinh t\cosh t, 2\cosh t) && (22)
\end{aligned}$$

Og det var lige det vi skulle finde. Hold da op hvor er det smukt.

Jeg tror ikke jeg har lavet denne opgave som opgavestileren harvde tænkt sig, der må være en lættere måde at gøre det på.

Opgave 1.5.11

Her får vi at vide, at men tit opgiver en kurve i polære koordinater $\rho(\theta)$ hvor $a \leq \theta \leq b$

Opgave a Vi skal vise, at arc-længden er givet ved

$$\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta \tag{23}$$

Vi forestiller os, at kurven ρ er givet ved

$$\rho(\theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \tag{24}$$

Arc-længden er givet ved

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \tag{25}$$

Vi går i gang, (for nemheden skyld, undlader vi at skrive θ i formlerne)

$$\begin{aligned}
\rho'(\theta) &= (\rho' \cos - \rho \sin, \rho' \sin + \rho \cos) \\
|\rho'(\theta)| &= \sqrt{(\rho' \cos - \rho \sin)^2 + (\rho' \sin + \rho \cos)^2} \\
&= \sqrt{(\rho')^2 \cos^2 + \rho^2 \sin^2 - \rho' \rho \cos \sin + (\rho')^2 \sin^2 + \rho^2 \cos^2 + \rho' \rho \sin \cos} \\
&= \sqrt{(\rho')^2 \cos^2 + (\rho')^2 \sin^2 + \rho^2 \sin^2 + \rho^2 \cos^2} \\
&= \sqrt{(\rho')^2 (\cos^2 + \sin^2) + \rho^2 (\sin^2 + \cos^2)} \\
&= \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}
\end{aligned}$$

Og det var det vi skulle vise.

Opgave b Her skal vi vise, at krumningen i polære koordinater er givet ved

$$k(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{3/2}} \tag{26}$$

Krumningen er defineret som $|\rho''(\theta)| = k(\theta)$, men vi vælger i stedet for igen at bruge formelen fra opgave $1 - 5 - 12, d$

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \tag{27}$$

Her får vi nogle lange og komplicerede udtryk, som er tunge at komme igennem, og hvis man får det rigtige resultat har man regnet rigtigt, og får man ikke det rigtige resultat har man regnet forkert. Derfor tillader

jeg mig at sige at det er måden man gør det på, uden selv at regne efter.

Opgave 3 (VLH)

Vi får opgivet en formel der giver en grov tilnærmelse giver vinklen u til solhøjden i forhold til horisonten

$$\sin u = \sqrt{2} \cdot \sin(\frac{x}{24} \cdot \pi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{28}$$

hvor x måles i timer fra midnat til midnat.

Opgave a Her skal vi finde solhøjden når den er maksimal (kl 12)

Vi indsætter først $x = 12$

$$\begin{aligned}
\sin u &= \sqrt{2} \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot \pi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \sqrt{2} \cdot - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\
u &= 45^\circ
\end{aligned}$$

Solen står altså på 45° på himlen kl 12. Spørgsmålet er så hvornår på året det gælder. Vi har før udregnet på kurset, at den. $21/6$ står solen på omkring 58° og den $21/12$ på 10° når solen står højst. Dvs. at formelen passer ikke så godt til bægge tilfælde, men et sted imellem.

Opgave b Her skal vi finde ud af hvornår solen står op og hvornår solen går ned. Med andre ord, til hvilke x er $\sin u = 0$. Vi isolerer og indsætter

$$\begin{aligned}
\sin u &= \sqrt{2} \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot \pi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\
\frac{1}{2} &= \sin(\frac{x}{24} \cdot \pi) \Rightarrow \\
&= \sin(\frac{4\pi}{24}) = \sin(\frac{20\pi}{24})
\end{aligned}$$

Solen står altså op kl 4 og går ned klokken 20

Opgave c Her gives et eksempel på, at der spilles bold på stranden om eftermiddagen, hvor bolden kaster en ellipseformet skygge på sandet med excentricitet $e = 0,86$. Spørsmålet er: Hvad er klokken?

(Hint: Man kan erstatte $e = 0,86$ med $e = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$, og benytte, at så er $\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{2}/2(\sqrt{3} - 1)$. I bogen på side 11 er givet en formel som vi vil bruge

$$\sin^2 u = 1 - e^2 \Rightarrow \sin u = \sqrt{1 - e^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1) \tag{29}$$

Nu samler vi sammen, isolerer og indsætter

$$\begin{aligned}
\sin u &= \sqrt{2} \sin(\frac{x}{24}\pi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1) &= \sqrt{2} \sin(\frac{x}{24}\pi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) + \frac{1}{2} &= \sin(\frac{x}{24}\pi) \\
\frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin(\frac{x}{24}\pi) \Rightarrow \\
x = 16 &
\end{aligned}$$

Denne begivenhed på stranden sker altså kl 16 (16 fordi det er om eftermiddagen, hvis det var om formiddagen ville det være kl 8).