E5 opgavesæt 1

Jogvan M. Poulsen

9. november 2001

Opgave 1.3.1

Vi skal vise, at tangenten til kurven $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ har en konstant vinkel til linien $l(t)$, hvor $y = 0$ og $x = z$. Vi vælger at skrive linien $l(t) = (f(t), 0, f(t))$ som $f(t) = t$. Dvs. $l(t) = (t, 0, t)$. Vi benytter os af formelen

$$\frac{\alpha'(t) \cdot l(t)}{|\alpha'(t)||l(t)|} = \cos\theta \tag{1}$$

Først udregner vi de indgåede størrelser

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (3, 6t, 6t^2) &(2)\\ |\alpha(t)| &= \sqrt{3^2 + 6^2t^2 + 6^2t^4} = 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} &(3)\\ |l| &= \sqrt{t^2 + 0 + t^2} = t\sqrt{2} &(4) \end{aligned}$$

Vi indsætter nu i formelen og udregner

$$\frac{(3, 6t, 6t^2) \cdot ((t, 0, t))}{3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} \cdot t\sqrt{2}} = \frac{3t(1 + 2t^2)}{3t\sqrt{(2 + 8t^2 + 8t^4}} = \cos\theta = konstant \tag{5}$$

Når dette udtryk er konstant, så er kvadratet af det også, derfor tillader vi os at tage kavadrater af det

$$\frac{(1 + 2t^2)^2}{(\sqrt{(2 + 8t^2 + 8t^4})^2} = \frac{1 + 4t^2 + 4t^4}{2(1 + 4t^2 + 4t^4)} = \frac{1}{2} = konstant \tag{6}$$

Vi kan nu se, at $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$, som betyder at $\theta = \frac{\pi}{4}$og det kan man sige er rimelig konstant.

Opgave 1.3.4

Vi få opgivet en kurve $\alpha(t)$ kaldet en *tracetrix*, som afbilder $I \to \mathbf{R}$, hvor $t \in I = (0.\pi)$. Kurven er givet ved

$$\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \log\tan\frac{t}{2}) \tag{7}$$

hvor t er vinkelen mellem y-aksen og vektoren $\alpha'(t)$.

Opgave a Her skal vi vise, at α er en differentialbe kurve med et singulært punkt i $t = {}^{\pi}/_{2}$. De funktioner der indgår i $\alpha(t)$ er veldefinerede i hele intervallet da 0 og π ikke er med. Vi tillader os derfor at differentiere som normalt. Først omskriver vi udtrykket lidt (jeg er mere fortrolig med cos og sin end tan)

$$\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \log\sin\frac{t}{2} - \log\cos\frac{t}{2}) \tag{8}$$

Nu differentierer vi

$$\alpha'(t) = (\cos t, \frac{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} - \sin t) = (\cos t, \frac{1}{\sin t} - \sin t) \tag{9}$$

Her har vi brugt idiotformelen og, at $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ Hvis vi nu indsætter $t = {}^{\pi}/_{2}$ får vi

$$\alpha'(\frac{\pi}{2}) = (0, 1 - 1) = (0, 0) \tag{10}$$

Her kan vi se, at kurven ikke er regulær i $t = {}^{\pi}/_{2}$.

Opgave b Her skal vi vise, at afstanden mellem et puntk på kurven α og det punkt på y-aksen, som tangentvektoren skærer, er 1 for alle t. Vi begynder med at finde ud af hvad om t egentlig er vinkelen mellem y-aksen og tangentvektoren. Hældnngen på $\alpha'(t)$ kan skrives som

$$\frac{\alpha'_y(t)}{\alpha'_x(t)} = \frac{1 - \sin^s t}{\sin t \cos t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\tan t} \tag{11}$$

t er altså den spidse vinkel mellem y-aksen og tangentvektoren. Når vi nu har hældningen på $\alpha'(t)$ er det nemt at optegne en retvinklet trekant, og ved hjælp af trigonimetriske beregninger finde længden af linien. Længden af den vandrætte linie, som vi kan vælge at kalde x (fra y-aksen og til kurven) er $\alpha_x(t)$. Nu kan vi udregne hypotenosen på trekanten som er det liniestykke vi skulle finde længden på

$$h = \frac{\alpha_x(t)}{\sin t} = \frac{\sin t}{\sin t} = 1 \tag{12}$$

Hvor er det dog smukt

Opgave 1.4.3

Vi skal finde vinkelen mellem to planer. Planerne er givet ved hhv. $(5x + 3y + 2z - 4 = 0)$ og $(3x + 4y - 7z = 0)$. Dette gøres ved af finde vinkelen mellem planernes normaler. Vi anvender følgende formel

$$\frac{u \cdot v}{|u||v|} = \cos\theta \tag{13}$$

Hvor $u = (5, 3, 2)$, $|u| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2}$, $v = (3, 4, -7)$ og $|v| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 7^2}$. Nu er det bare at indsætte og regne

$$\cos\theta = \frac{(5, 3, 2) \cdot (3, 4, -7)}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{13}{\sqrt{38 \cdot 74}} \approx 75,8^o \tag{14}$$

Det skulle være det. Vi kunne også have valgt at udregne vinkelen udfra kryds-produktet, da opgaven er stillet i forlængelse af kapitlet om krydsprodukter, men jeg synes ikke det er nødvendigt at gøre opgaven mere besværlig end nødvendigt.