E4 opgavesæt 3

Jogvan M. Poulsen

20. november 2000

Opgave 13.10.5

Vi skal vise, at hvis H er en undergruppe med index 2 i en gruppe G, så er den venstre sideklasse gH det samme som den højre sideklasse Hg for alle $g \in G$.

Det at undergruppen H har index 2 i gruppen G betyder, at der eksisteret en 'komplimentær' undergruppe H' i G, sådan at $H \cup H' = G$ og at $H \cap H' = \{\emptyset\}$. Hvis vi tager et element i $g \in G$ og ganger det på elementerne i undergruppen H får vi gH. Hvis g også lå i H, ville vi stadig få H.

$$\forall g \in H : gH \in H$$

Hvis derimod g ikke ligger i H, nemlig i H', ville vi få H'

$$\forall g \in G \setminus H : gH \in H'$$

Siden H og H' er disjunkte, vil et element i G som ikke er i H være i H'. Det betyder at $gH = Hg$, for hvis $gH = H$ er $H = Hg$ og videre hvis $gH = H'$ så er $H' = Hg$, da der ikke er andre muligheder.

Opgave 13.10.11

Vi får opgivet to endelige undergrupper K og L i gruppen G. Vi skal så vise, at delmængden KL er en undergruppe i G hvis og kun hvis $KL = LK$, hvor KL er givet ved

$$KL = \{g \in G | g = KL \text{ for nogle } k \in K \text{ og } l \in L\}$$

For at KL skal være en gruppe, skal der for ethvert element i gruppen eksistere en invers. Resten af betingelserne er givet, da der er tale om en undergruppe og at mængden er endelig. Dette viser vi ved først at vise, at hvis KL er undergruppe G, så er $KL = LK$. Og modsat at $KL = LK$ medfører KL er undergruppe i G.

KL er undergruppe i $G \Rightarrow KL = LK$ Her vil der gælde to betingelser, nemlig at KL er lukket, og at der for ethvert element $kl \in KL$ eksisterer et inverst element $(kl)^{-1} \in KL$, så at $kl \cdot (kl)^{-1} = 1$ (hvor 1 betegner neutralelementet). Udfra dette skal vi vise, at $KL = LK$. Det at KL er lukket betyder, at for ethvert element $k_i l_j \in KL$ gælder at

$$k_1 l_1 \cdot k_2 l_2 = k_3 l_3 \in KL$$

Med hensyn til det inverse element i KL følger

$$\begin{aligned} k \in K \quad &\Rightarrow \quad k^{-1} \in K \text{ og } l \in L \Rightarrow l^{-1} \in L \\ &\Rightarrow \quad kl \in KL \text{ og } k^{-1}l^{-1} \in KL \\ &\Rightarrow \quad (kl)(k^{-1}l^{-1}) = (kl)(lk)^{-1} \\ &\Rightarrow \quad (lk)^{-1} \in LK \end{aligned}$$

Dvs. at ethvert element i KL vil have en invers i LK, og af symmetrigrunde er også det omvendte tilfældet. Dette fordi vi har en endelig mængde, og et elementerne i KL netop har ,n invers, da må det også gælde den anden vej. Derfor er $KL = LK$.

$KL = LK \Rightarrow KL$ er undergruppe i G Nu da $KL = LK$, kan vi betragte to vilkårlige elementer $k_1 l_1, k_2 l_2 \in KL$ hvor der gælder

$$k_1 l_1 \cdot k_2 l_2 = k_1 (l_1 k_2) l_2$$

Der gælder her for ethvert element $k_3 l_3 \in KL$, at der eksisterer et element $l_4 k_4 \in LK$ så at $k_3 l_3 = l_4 k_4$. Nu kan vi forstætte

$$k_1 (l_1 k_2) l_2 = k_1 (k_5 l_5) l_2 = (k_1 k_5)(l_5 l_2) = k_6 l_6 \in KL$$

Bemærk at både K og L selv er undergrupper i G, og derfor lukkede som betyder at $k_i k_j = k_l \in K$ og $l_i l_j = l_l \in L$ henholdsvis. Altså er KL lukket. Videre gælder der for ethvert element $k_1 l_1 \in KL$, at dets inverse element $k^{-1} l^{-1}$ ligger i G, som igen betyder at $k_1^{-1} l_1^{-1} = (lk)^{-1}$ som ligger i LK. Altså når $KL = LK$ er mængden lukket og dens elementer har deres inverse-elementer i sælve mængden, hvilket betyder at mængden er en gruppe. Hermed har vi vist at hvis og kun hvis $KL = LK$ er KL en undergruppe i G, hvor KL er defineret som før skrevet.

Opgave 14.7.8

Hvis hvert hjørne i en regulær tetraide får tildelt en af farverne rød, hvid eller blå, da skal vi finde hvor mange forskællige tetraide der er i alt. Dette gøres nemt og elegant ved at anvende følgende formel

$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Vi begynder med at finde $F(g)$ og $|F(g)|$. Størrelsen $|X|$, som angiver hvor mange måder man kan anbringe farver på tetraidens hjørner, fremkommer ved at der er 3 farver og fire hjørner, hvilket betyder at

$$|X| = 3^4 = 81$$

Det betyder, at der er ialt 81 identiteter. Vi har to typer af rotationer. Den der roterer over aksen som går gennem et hjørne og midten at dem modsatte side. Denne rotation kan roteres 120° og 240°. Vi ialt er 4 hjørner med hver 2 rotationer som ikke flytter på hjørnet på rotationsaksen. De mulige farvekombinationer her er 3 for selve rotationshjørnet, og 3 for de tre andre hjørner (de skal alle 3 have samme farve). Dette betyder at $|F(g)|$ for denne type være $3^2(2 \cdot 4) = 3^2 \cdot 8$. Den anden for for rotation er hvor rotationsaksen går gennem midten af to på hinanden modsatte kanter. Her er der kun muligt at rotere ‚n gang, og da der ialt er 6 kanter har vi tre forskellige rotationsakser. Farverne er her igen 3 mulige for hver at 'hjørneparene' (de hjørner der bytter plads), hvilket giver os, at $|F(g)|$ for denne type være $3^2 \cdot 3$). Vi kan liste dem op i en tabel.

F(g)		|F(g)|
Identitet		81
hjørnerotation $120°, 240°$		$3^2 \cdot 8$
siderotation 180°		$3^2 \cdot 3$
	$\lvert G\rvert$	12

Vi ser at $|G| = id + 8 + 3 = 12$. Nu er der bare at indsætte

$$t = \frac{1}{|12|} \cdot (81 + 3^2 \cdot 8 + 3^2 \cdot 3) = 15$$

Der er altså 15 forskellige kombinationer af tetraider med 3 mulige farver på hjørnerne.

Opgave 14.7.16

Givet et primtal p, og T_p defineret som mængden af permutationer i $\mathbf{Z}_p$ givet ved funktionen

$$t(x) = ax + b \qquad \text{, hvor } a, b, x \in \mathbf{Z}_p$$

og hvor $a \neq 0$. Da skal vi vise, at T_p er en gruppe af orden $p(p-1)$. Ydermere skal vi bevise, at for et vilkårligt ordnet par (x_1, y_1) og (x_2, y_2) med forskellige elementer i $\mathbf{Z}_p$, da eksisterer der en unik permutation t i T_p, således at $t(x_1) = x_2$ og $t(y_1) = y_2$.

Dat at T_p er en gruppe betyder at den skal være lukket, at der til ethvert element $t_p \in T_p$ skal finde et inverse element $t_p^{-1} \in T_p$ og at der skal eksistere et neutralt element. At den er lukket er trivielt, da $t(x_1) = ax_1 + b = x_2$. Vi kan godt se, at ved at rykke rundt på elementerne kan vi ikke komme ud af gruppen. Neutralelementer er entydig bestemt ved

$$t(x) = ax + b = x \Rightarrow a = 1, b = 0$$

Det at der er et inverst element til t_i, betyder at der findse et permutation t_i^{-1} hvor $t_i^{-1}(t_i(x)) = x$.

$$\begin{aligned} t_i^{-1}(t_i(x)) &= e(ax+b) + f = aex + be + f \\ e &= a^{-1} \\ be + f &= 0 \Rightarrow b = -a^{-1} f \end{aligned}$$

Vi ved at der eksisterer et a^{-1} siden a kommer fra $\mathbf{Z}_p$ (p er et primtal) og at $a \neq 0$. Derfor har t_i en invers i T_p.

Ordenen af gruppen er $p(p-1)$, da b kan have p forskellige værdier, og a kan have $p-1$ forskellige værdier.

Hvis vi får givet to vilkårlige ordnede par (x_1, y_1) og (x_2, y_2), kan vi finde en unik permutation således, at $t(x_1) = x_2$ og $t(y_1) = y_2$. Det eneste krav vi må stille er, at hvis $x_1 \neq x_2$ må $y_1 \neq y_2$. Vi kan opskrive følgende

$$\begin{aligned} t(x_1) = ax_1 + b = x_2 \\ t(y_1) = ay_1 + b = y_2 \end{aligned}$$

Vi ved at ethvert element i $\mathbf{Z}_p$ har en invers. Derfor kan vi gøre følgende

$$\begin{aligned} ax_1 + b = x_2 \quad &\Rightarrow \quad a = x_1^{-1}(x_2 - b) \\ (x_1^{-1}(x_2 - b))y_1 + b = y_2 \quad &\Rightarrow \quad b = (x_1^{-1}y_1 + 1)^{-1}(y_2 - y_1 x_1^{-1} x_2) \end{aligned}$$

Dermed er a og b entydigt bestemt.

Opgave 15.9.3

Her skal vi finde et ireducibelt 4-gradspolynomium $\mathbf{Z}_5[x]$. Vi kan til at begynde (for ikke at gøre det alt for besværligt) med foreslå et fjerdegrads-monomium at typer

$$f(x) = x^4 + p \qquad , p \in \mathbf{Z}_p$$

Det vi først gør er at sikre os, at der ikke findes linære faktorer, der kan faktorisere monomiet. Dette gør vi ved at indsætte de mulige værdier i x, for derefter at udvælge de mulige værdier til p.

$$\begin{aligned}
f(0) &= (0)^4 + p = p \\
f(1) &= (1)^4 + p = p + 1 \\
f(2) &= (2)^4 + p = p + 16 = p + 1 \\
f(3) &= (3)^4 + p = p + 81 = p + 1 \\
f(4) &= (4)^4 + p = p + 256 = p + 1
\end{aligned}$$

Det vi her kan se er, at p kun kan have værdierne 1,2 og 3. Det næste er igen at finde ud af hvilke værdier p kan have for at der ikke er kvadratiske faktorer der kan faktorisere vores monomium.

$$(x^4 + p) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Her begynder vi med at finde ud af relationen mellem p og a, b, c, d. Det gør vi ved at gange monomierne ud

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$$

For at vores momomium skal kunne faktoriseres, skal følgende gælde

$$\begin{array}{rcl} a + c = 0 & \Rightarrow & a = -c \quad , \quad b + d + ac = 0 \quad \Rightarrow \quad b + d = -c^2 \\ ad + bc = 0 & \Rightarrow & b = d \quad , \quad bd = p \quad \Rightarrow \quad b^2 = d^2 = p \end{array}$$

Her kan vi se, at hvis p ikke kan skrives som et kvadrat af et tal i $\mathbf{Z}_5$, kan $x^4 + p$ ikke faktoriseres. Udover 0 og 4, kan vi så heller ikke vælge $1^2 = 4^2 = 1$ og $2^2 = 3^2 = 4$. Tallet p kan så kun antage værdierne 2 og 3. Dermed har vi fundet det ireducible fjerdegrads polynomium som vi skulle, nemlig

$$f(x) = x^4 + 3$$

Siden der ikke er noget førstegrads polynomium der kan faktorisere vores polynomium, er der heller ikke noget tredjegrads polynomium der kan det, derfor undlader vi at lede efter dem.

Opgave 15.9.17

Vi skal vise, at mængden af reelle tal af formen $m + n\sqrt{2}$, hvor m og n er heltal, er en ring med hensyn til operationerne addition og multiplikation. Vi skal også vise, at $m + n\sqrt{2}$ er invertibel i ringen hvis og kun hvis $m^2 - 2n^2 = \pm 1$

For at vise at der er tale om en ring, skal vi vise, at vores mængde opfylder 'ring'-aktiomerne. Her vil jeg nøjes med at vise, at den der lukket og at der eksisterer et neutralelement, begge med hensyn til multiplikation. Neutralelementet er enkelt - nemlig

$$1 + 0\sqrt{2}$$

For at vise at den er lukket, ganger vi to tilfældige elementer med hinanden og ser, at det også tilhører mængden

$$(m + n\sqrt{2}) \cdot (p + q\sqrt{2}) = (mp + 2nq) + (mq + np)\sqrt{2}$$

Vi kan se, at $(mp + 2nq)$ og $(mq + np)$ er begge to hele tal. Dermed er mængden lukket med hensyn til multiplikation. Jeg giver ikke vise at den er kommutativ, associativ og distributiv.

invertibel Hvis tallet $m+n\sqrt{2}$ skal have en invers, skal der eksistere et element $(m+n\sqrt{2})^{-1}$ således, at de to ganget sammen giver 1, og hvor tallet er af samme type som $m + n\sqrt{2}$. Vi ser hvad det betyder for tallet

$$\begin{aligned}
1 &= (m + n\sqrt{2}) \cdot (m + n\sqrt{2})^{-1} \\
&= \frac{1}{m + n\sqrt{2}} \cdot (m + n\sqrt{2}) \\
&= \frac{m - n\sqrt{2}}{(m + n\sqrt{2})(m - n\sqrt{2})} \cdot (m + n\sqrt{2}) \\
&= \frac{m - n\sqrt{2}}{m^2 - 2n^2} \cdot (m + n\sqrt{2}) \\
&= \left(\frac{m}{m^2 - 2n^2} - \frac{n}{m^2 - 2n^2}\sqrt{2} \right) \cdot (m + n\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Da der gælder at $m^2 \geq 0$ og $2n^2 \geq 0$, må $m^2 - 2n^2 \pm 1$ for at den inverse skal eksistere i den oprindelige mængde.