E4 opgavesæt 2

Jogvan M. Poulsen

23. oktober 2000

Opgave 4.8.13

Der bliver spurgt om, hvor mange heltal x der er, hvor $1 \leq x \leq 1000$ og som $2, 3$ og 5 ikke går op i

Her skal vi bruge 'sigte-princippet', hvor vi skal 'sigte' de elementer hvor $2, 3$ og 5 går op i, fra de ialt 1000 elementer der er i $\mathbf{N}_{1000}$. Vi vælger at kalde denne mængde for X, hvor det er $|X|$ vi skal finde. Til dette definerer vi følgende mængder

$$\begin{aligned}
X(2) &= \{x \in \mathbf{N}_{1000} | (2|x)\} \Rightarrow |X(2)| = 500 \\
X(3) &= \{x \in \mathbf{N}_{1000} | (3|x)\} \Rightarrow |X(3]| = 333 \\
X(5) &= \{x \in \mathbf{N}_{1000} | (5|x)\} \Rightarrow |X(5)| = 200 \\
X(2,3) &= \{x \in \mathbf{N}_{1000} | (2|x \wedge 3|x)\} \Rightarrow |X(2,3)| = 166 \\
X(2,5) &= \{x \in \mathbf{N}_{1000} | (2|x \wedge 5|x)\} \Rightarrow |X(2,5)| = 100 \\
X(3,5) &= \{x \in \mathbf{N}_{1000} | (3|x \wedge 5|x)\} \Rightarrow |X(3,5)| = 66 \\
X(2,3,5) &= \{x \in \mathbf{N}_{1000} | (2|x \wedge 3|x \wedge 5|x)\} \Rightarrow |X(2,3,5)| = 33
\end{aligned}$$

Måden vi finder antallet af elementer i de respektive mængder fremkommer ved, at vi kan opskrive tallet 1000 som $1000 = qd + r$, hvor $0 \leq r < d$. Tager vi f.eks. mængden $X(2,3)$, så angiver $q = 2 \cdot 3$ (den laveste fællesnevner af 2 og 3) og $d = |X(2,3)|$, som i dette tilfælde bliver

$$1000 = (2 \cdot 3)d + r \Rightarrow d = 166 \quad , r = 4$$

Vores opgave består nu i, at udregne

$$|X| = 1000 - |X(2) \cup X(3) \cup X(5)| \tag{1}$$

Vi begynder med at have ialt 1000 elementer, så trækker vi de elementer fra hvor $2, 3$ og 5 går op i. Nu har vi trukket elementerne, hvor 2 og 3, 2 og 5 samt 3 og 5 går op i, fra to gange, og skal derfor lægge dem til igen. Til sidst skal vi igen trække de elementer fra, hvor både $2, 3$ og 5 går op i, fordi vi kom til at lægge dem til igen. Vi kan nu begynde at regne ud

$$\begin{aligned}
|X| &= 1000 - |X(2) \cup X(3) \cup X(5)| \\
&= 1000 - (|X(2)| + |X(3)| + |X(5)|) \\
&\quad + (|X(2,3)| + |X(2,5)| + |X(3,5)|) - |X(2,3,5)| \\
&= 1000 - (500 + 333 + 200) + (166 + 100 + 66) - 33 \\
&= 266
\end{aligned}$$

Der er således i alt 266 heltal i intervallet $[1, 1000]$, hvor hverken $2, 3$ eller 5 går op i.

Opgave 4.8.16

En funktion f defineret på $\mathbf{N}$ kaldes multiplikativ hvis

$$f(nm) = f(n)f(m)$$

når $\gcd(n, m) = 1$. Vi skal vise, at hvis f er multiplikativ, så er g det også defineret som

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

Det som vi skal vise er, at $g(nm) = g(n)g(m)$ når førnævnte betingelser er opfyldt. Vi begynder med at se på $g(n)$ og $g(m)$

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad , \quad g(m) = \sum_{d'|m} f(d')$$

Når n og m er indbyrdisk primiske, er d og d' det nødvendigvis også. Nu skal vi redegøre for, at vi kan skrive funktionen $g(nm)$ som følgende

$$\begin{aligned} g(n)g(m) &= \sum_{d|n} f(d) \cdot \sum_{d'|m} f(d') \\ &= \sum_{d|n} \sum_{d'|m} f(d)f(d') \\ &= \sum_{d|n} \sum_{d'|m} f(d \cdot d') \\ &= \sum_{d''|n \cdot m} f(d'') \end{aligned}$$

Da $\gcd(d, d') = 1$ er f multiplikativ, hvilket betyder at $f(d)f(d') = f(d \cdot d')$. Det som nu mangler at vise er, at $d'' = d \times d'$. Det er det hvis vi kan lave en bijektiv afbildning mellem elementerne i de respektive mængder. Vi definerer først mængderne S_1 og S_2

$$\begin{aligned} S_1 &= \{d'' | (d'' | n \cdot m)\} \\ S_1 &= \{d \times d' | (d|n) \times (d'|m)\} \end{aligned}$$

Vi kan opløse m, n og $m \cdot n$ i primfaktorer.

$$\begin{aligned} m &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \\ m &= q_1 \cdot q_2 \cdots q_l \\ m \cdot n &= p_1 \cdots p_k \cdot q_1 \cdots q_l \end{aligned}$$

Her kan vi se, at samtlige divisorer i n og m også er divisorer i $n \cdot m$. Og at et produkt af divisorer i m og n også er en divisor i $n \cdot m$. Dermed er $d \times d' = d''$. Vi kan så slutte at

$$\begin{aligned} g(n)g(m) &= g(nm) \\ \sum_{d|n} f(d) \cdot \sum_{d'|m} f(d') &= \sum_{d \times d'|n \cdot m} f(d \cdot d') \end{aligned}$$

Opgave 5.7.4

Vi får givet $\alpha, \beta \in S_8$, som følgende cykler

$$\alpha = (123)(456)(78), \quad \beta = (1357)(26)(4)(8)$$

Her skal vi finde sgn α og sgn β, og udtrykke α og β som transpositioner, hvor vi skal bruge færrest mulige transpositioner.

En transposition er en permutation hvor der er ‚n 2-cykel, hvor resten er 1-cykler. Man kan omskrive enhver permutation som en sammensætning af en række transpositioner (2-cykler). Det mindste antal transpositioner en permutation $\pi = \tau_r \tau_{r-1} \cdots \tau_1$ kan deles op i er $r-1$ transpositioner (se Biggs s.107). Hvis vi skal omskrive α til en række transpositioner, får vi

$$\alpha = (123)(456)(78) = (13)(12)(46)(45)(78)$$

som ialt er $r = (3-1)+(3-1)+(2-1) = 5$ transpositioner Tilsvarende gælder der for β

$$\beta = (1357)(26)(4)(8) = (17)(15)(13)(26)$$

som giver $r(4-1)+(2-1) = 4$ transpositioner

Vi skal nu angive sgn α og sgn β. Hvis vi ser i Biggs s.108, så er der udledt en formel for sgn $\pi = (-1)^r$, hvor r er antallet af transpositioner. Dette giver os, at

$$\begin{aligned} \text{sgn } \alpha &= (-1)^5 = -1 \Rightarrow \text{sgn } \alpha = - \\ \text{sgn } \beta &= (-1)^4 = 1 \Rightarrow \text{sgn } \beta = + \end{aligned}$$

Opgave 5.7.17

Vi bliver bedt om at opskrive de mulige permutationer i S_7, som er derangemente, og finde værdien til d_7. Vi skal finde alle de mulige permutationer hvor alle led bytter plads, dvs. uden 1-cykler og kun tælle de enkelte permutationer ‚n gang. F.eks. er permutationerne (1234) og (2341) den samme. Hvis vi begynder med at liste op hvor mange forskellige typer permutationer vi kan lave, og tælle op hvor mange derangementer vi kan få i alt. Antallet af permutationer med en bestemt type $[1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n}]$ er givet ved

$$\frac{(1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n)!}{1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n} \cdot \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \cdot \alpha_n!}$$

Vi vil her undlade de typer der indeholder 1-cykler. Dette giver os så ialt

Type	Eksempel	Antal
$[2^2 3]$	(..)(..)(...)	210
[25]	(..)(.....)	504
[34]	(...)(....)	420
[7]	(.......)	720
Antal ialt		1854

En anden og mere direkte måde at udregne d_7 på, er at bruge eksempl 2 side 73 i Biggs. Her bliver der udledt en formel som er

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

I vores konkrete tilfælde med d_7 bliver det

$$\begin{aligned}
d_7 &= 7!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots(-1)^7\frac{1}{7!}\right)\\
&= 5040\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}-\frac{1}{5040}\right)\\
&= 1854
\end{aligned}$$

hvilket vi også fik på den anden måde - heldigvis.

Opgave 6.6.6

Her skal vi bruge, at $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ til at konstruere en test for divisibilitet af $7, 11$ og 13, tilsvarende som 9-talstesten og 11-talstesten i opgave 6.1.4 i Biggs.

I opgave 6.1.4 fik vi præsenteret en metode til at teste om 11 gik op i et vilkårligt tal x. Vi vil nu tilsvarende finde en metode til at teste om 1001 går op i et vilkårligt tal x. Først vælger vi at skrive tallet $x = x_n x_{n-1} \cdots x_0$ som en sum i 1000-talsystemet. $x = x_n x_{n-1} \cdots x_0$ som en sum, hvor x_i betegner det i'te ciffer i x, (i 1000-talsystemet bliver det så tre ciffre i 10-talsystemet). F.eks. vil tallet 12345678 kunne skrives som $678 \cdot 1000^0 + 345 \cdot 1000^1 + 12 \cdot 1000^2$. I generel notaion bliver det

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot 1000^i$$

Vi definerer den altanerende tværsum $\theta(x)$ til

$$\theta(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot (-1)^i$$

Nu skal vi vise, at $x \equiv \theta(x)(\text{mod}1001)$. Og det er det hvis og kun hvis 1001 går op i $x - \theta(x)$. Dette forsøger vi så at omskrive lidt på

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot 1000^i\\
\theta(x) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i
\end{aligned}$$

Hvis nu vi trækker dem fra hinanden får vi

$$\begin{aligned}
x - \theta(x) &= \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot 1000^i - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i\\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot (1000^i - (-1)^i)
\end{aligned}$$

Hvis vi kan overbevise os om, at 1001 går op i $(1000^i - (-1)^i)$ for alle i, vil vi blive glade. Til det skælner vi mellem to tilfælde, nemlig hvor n er lige og n er ulige.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} x_i(1000^i - 1)) \\
n &= 2 \Rightarrow x = 999999 = 999 \cdot 1001 \\
n &= 4 \Rightarrow x = 999999999999 = 999999 \cdot 1001
\end{aligned}$$

Her kan vi se, at 1001 går op i et hvilket som helst tal, da vi får tal med et lige 999-taller. Det andet tilfælde er når n er ulige

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} x_i(1000^i + 1)) \\
n &= 1 \Rightarrow x = 1001 = 1 \cdot 1001 \\
n &= 3 \Rightarrow x = 1000000001 = 999001 \cdot 1001 \\
n &= 5 \Rightarrow x = 1000000000000001 = 999000999001 \cdot 1001
\end{aligned}$$

Her kan vi også se at mønsteret gentager sig. Vi er nu nået igennem med at vise, at ethvert tal x som er kongruent med den altanerede tværsum (af typen som før skrevet), med (mod 1001) vil 1001 gå op i x.

Det vi har fundet er, at hvis fjenden kommer med et tal ($x > 1001$), som vi skal undersøge om 7 eller 13 går op i, så kan vi omskrive det til formen $x = q \cdot 1001 + \theta(x)$, hvor $\theta(x)$ udgør resten. Det smarte er så, at vi behøver ikke at udregne q, men kan finde resten med vores altanerende tværsum. Når det er gjort, kan vi så undersøge om 7 eller 13 går op i $\theta(x)$, for gør de det, går de også op i x, da vi ved at de går op i 1001. Grunden til at jeg ikke medtager 11 er fordi vi allerede har en smart måde tal at undersøge det på, som faktisk er nemmere end denne metode. Skulle tallet x være så stort, at $\theta(x)$ også er større end 1001, så kan vi fortsætte med at finde $\theta(\theta(x))$ lige så længe det skulle være nødvendigt.