E4 opgavesæt 1

Jogvan M. Poulsen

2. oktober 2000

Opgave 1.9.12

Her bliver vi bedt om at finde værdien til et bestemt heltal n, hvor der gælder at n's primfaktorer kun indgår en gang $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ hvor $p_i \neq p_j$ når $i \neq j$. Endvidere skal der gælde, at hvis og kun hvis p går op i n, skal $p-1$ også gå op i n

$$p|n \Leftrightarrow p-1|n$$

Da både p og $p-1$ skal gå op i n, må 2 nødvendigvis gå op i n. Vi ved også, at når $2+1=3$ er et primtal, må også 3 gå op i n. Da både 2 og 3 går op i n må produktet $2 \cdot 3$ også gå op i n, samt $2 \cdot 3 + 1 = 7$, da det også er et primtal. Vi kan nu spørge os selv om 5 ikke kan gå op i n, men hvis 5 skal gå op i n, skal $5-1=4$ også gøre det, og der er primfaktoren 2 med to gange, så 5 duer ikke. Foreløbig kan vi nu konstatere, at n kan skrives som følgende

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot p_i \cdots$$

Nu skal vi så finde ud af om der er flere primfaktorer der opfylder betingelserne. Vi begynder med at konstruere en mængde M_1

$$M_1 = \{p \in P|(p > 7; p|n)\}$$

Mængden M_1 er klart nedadbegrænset hvis ikke den er tom. Lad os antage at den er ikke-tom, så eksisterer der netop et mindste element $p_1 \in M_1$. Der vil gælde for dette p_1, at $p_1 - 1$ kan skrives som et produkt at de allerede fundne primtal $2, 3$ og 7, da p_1 er det mindste element i M_1. Vi finder ud af ved at prøve os frem, at tallet $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 42 + 1$ er et primtal der ligger i mængden M og opfylder betingelserne til at gå op i n da $43 - 1|n$. Vi har nu fundet et tal mere som går op i n, og er sikre på, at der ikke er noget primtal mellem 7 og 43 som går op i n, da 43 var det mindste i M_1. Nu kører vi hele algoritmen igen, men hvor mængden er

$$M_2 = \{p \in P|(p > 43; p|n)\}$$

De mulige kandidater til $p_2 - 1$, findes udfra de allerede fundne primfaktorer

$$\begin{aligned}
2 \cdot 7 &= 14 \Rightarrow p_2 = 15 \\
2 \cdot 43 &= 86 \Rightarrow p_2 = 87 \\
2 \cdot 3 \cdot 43 &= 258 \Rightarrow p_2 = 259 \\
2 \cdot 7 \cdot 43 &= 602 \Rightarrow p_2 = 603 \\
2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 &= 1806 \Rightarrow p_2 = 1807
\end{aligned}$$

Her kan vi se, at ikke en eneste af de mulige kandidater til p_2 opfylder at være et primtal, som betyder, at der ikke er et mindste element i M_2, som derfor er tom. Det betyder, at vi har fundet samtlige primfaktorer i n og dermed det eftersøgte n som er

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = 1806 \tag{1}$$

Opgave 1.9.19

Her bliver vi bedt om at vise, at hvis $\gcd(a, b) = 1$ betyder det, at $\gcd(a+b, a-b)$ enten er 1 eller 2. Det at $\gcd(a, b) = 1$ betyder, at der findes et m og et n således, at der eksisteret et m og et n sådan at der gælder følgende

$$\gcd(a,b) = ma + nb = 1 \Rightarrow 2ma + 2nb = 2$$

Nu ser vi lidt på $(a+b)$ og $(a-b)$. Vi kan til at begynde med at udregne følgende

$$\begin{aligned} (m+n)(a+b) + (m-n)(a-b) &= \\ ma + mb + na + nb + ma - mb - na + nb &= \\ 2ma + 2nb & \end{aligned}$$

Vi kan heraf udlede at

$$(m+n)(a+b) + (m-n)(a-b) = 2ma + 2nb = 2$$

Her kan vi se, at 2 og højst 2 går op i $(m+n)(a+b) + (m-n)(a-b)$. Det vil sige, at enten går 2 ikke op i både $(m+n)(a+b)$ og $(m-n)(a-b)$, men kun summen af dem, hvor den højeste fælles devisor er 1, eller så går 2 op i dem begge, og den højeste fælles devisor er 2

Opgave 2.6.12

Et gitterpunkt i et 3-dimentionelt rum har heltals-koordinater. Vi skal vise, at hvis vi får givet 9 vilkårlige gitterpunkter, aå vil der gælde at der i mindst et tilfælde vil findes et gitterpunkt i midten af den linie der skærer to gitterpunkter. Det betyder at vi kan opskrive et gitterpunkt G_i op som

$$G_i = (x_i, y_i, z_i) \quad , i = 1, 2, \cdots, 9$$

Hvis midten at linien der går fra et punkt til et andet, skal være et gitterpunkt M, skal dets kooedinater være heltal

$$M = \left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2}, \frac{z_i + z_j}{2} \right)$$

Det vil sige, at M kun er et gitterpunkt hvor hhv. z_i og x_j både er lige eller ulige og tilsvarende med koordinaterne y_i,y_j og z_i,z_j Her kommer dueslagsprincippets estetiske overlegenhed til sin fulde ret. Der er to muligherer for hhv x, y og z koordinaterne. Enter er de lige eller er di ulige. Det betyder, at der er i alt 2^3 forskellige muligheder at lave et gitterpunkt på. Med 8 forskellige kombinationer, og 9 gitterpunkter, må mindst et af gitterpunkterne have samme kombination som et andet.

Opgave 2.6.16

Vi skal vise, at en vilkårlig forening at to tællelige mængder selv er tællelig. Lad os antage at de er uendelige, thi var de det ikke, er det trivielt at vise. Vi får givet to mængder som vi kan kalde for X og Y. Nu kan vi opdele vores problem i tre tilfælde, nemlig hvor fællesmængden er

i) $X \cap Y = \{\emptyset\}$ X og Y er disjunkte
ii) $X \cap Y = \{x_1, \cdots, x_k\}$ fællesmængden er endelig
iii) $X \cap Y = \{x_1, \cdots, x_j \cdots\}$ fællesmængden er uendelig

Hvis vi begynder med at karaktisere X og Y, så ved vi, at de hver i sær er tællelige, dvs. at der findes en bijektion $\alpha : \mathbf{N} \to X$, og $\beta : \mathbf{N} \to Y$. Vores opgave består først i at karaktisere mængden $X \cap Y$ for alle tre tilfælde, og derefter at lave en bijektion $\gamma : \mathbf{N} \to X \cup Y$.

i) Her, hvor $X \cap Y$ er tom, kan vi omorganisere hhv. X og Y, sådan at

$$\begin{aligned} X &= \{x_i \in X | x_i = z_j\} \quad , j = 1, 3, 5, \cdots \\ Y &= \{y_i \in Y | y_i = z_j\} \quad , j = 2, 4, 6, \cdots \end{aligned}$$

Nu vil vi kunne lave en bijektion på $Z = X \cup Y$, nemlig hvor

$$\gamma_1 : \mathbf{N} \to Z \qquad , Z = X \cup Y = \{z_1, z_2, \cdots\} \tag{2}$$

ii) Når fællesmængden er endelig, kan vi først tælle den, og derefter X og Y hveranden gang. Dvs. at vi omorganiserer vores mængder som følger

$$\begin{aligned} X \cap Y &= \{x_i \in X \cap Y | x_i = z_j\} \quad , j = 1, 2, \cdots, k \\ X \setminus Y &= \{x_i \in X \setminus Y | x_i = z_j\} \quad , j = k+1, k+3, k+5 \cdots \\ Y \setminus X &= \{y_i \in Y \setminus X | y_i = z_j\} \quad , j = k+2, k+4, k+6 \cdots \end{aligned}$$

Her vil vores bijektion på Z være tilsvarende

$$\gamma_2 : \mathbf{N} \to Z \qquad , Z = X \cup Y = \{z_1, z_2, \cdots\} \tag{3}$$

iii) Det sidste tilfælde, hvor fællesmængden er uendelig, tæller vi alle tre mængder samtidig. Vores omorganisering af elementerne bliver derfor

$$\begin{aligned} X \cap Y &= \{x_i \in X \cap Y | x_i = z_j\} \quad , j = 1, 4, 7, 10 \cdots \\ X \setminus Y &= \{x_i \in X \setminus Y | x_i = z_j\} \quad , j = 2, 5, 8, 11 \cdots \\ Y \setminus X &= \{y_i \in Y \setminus X | y_i = z_j\} \quad , j = 3, 6, 9, 12 \cdots \end{aligned}$$

Her vil vores bijektion på Z igen være

$$\gamma_3 : \mathbf{N} \to Z \qquad , Z = X \cup Y = \{z_1, z_2, \cdots\} \tag{4}$$

Hvis nu tilfældet var, at X eller Y fra starten var endelige, ville fællesmængden enten være tom eller endelig, hvor vi så kunne tælle de endelige mængder op først (f.eks. $X \setminus Y$ og $X \cap Y$), for derefter at tælle den uendelige $Y \setminus X$. Var begge to endelige, ville vi først kunne tælle $X \setminus Y$ så $Y \setminus X$ og til sidst $X \cap Y$. Vi kan her konkludere, at en mængde Z, som består af to tællelige, ikke nødvendigvis endelige eller disjunkte, mængder X og Y selv er tællelig, da vi altid vil kunne konstruere en bijektion $\gamma : \mathbf{N} \to Z$, hvor $Z = X \cup Y$.

Opgave 3.3.2

Hvis x og n er indbyrdis primiske, akal vi vise at det medfører at $n - x$ og n også er det. Vi skal udlede, at $\phi(n)$ er lige for alle $n \geq 3$ Dette vil jeg vise med en modstrid. Vi antager at der findes et tal d som går op i både $n - x$ og n, og ser hvad det betyder for d, da vi får opgivet at $\gcd(n, x) = 1$ Da $d | n$ og $d | n - x$ må der findes et a og et b hvor følgende gælder

$$n - x = da \quad n = db$$

Vi kan så udregne følgende

$$x = n - da = db - da = d(b - a)$$

Det vil sige at d går op i både n og x og må derfor være 1 Det næste spørgsmål om hvorfor $\phi(n)$ er lige for $n \geq 3$ kan vi svare, at de tal der er indbyrdis primiske med n kommer parvis. Dvs. at hvis $n - x$ og n er indbyrdisk primiske, vil x og n også være det, bortste fra når $n - x = x = {}^{n}/_{2}$ samt når $n = 1$ eller $n = 2$